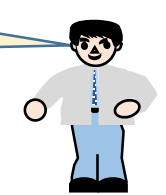


なるほど！シリーズ1
静的事象と動的事象の違いとは？
なるほど！シリーズ1の復習を兼ねて
「これだけ知っていれば ほぼ 大丈夫」



静的事象や動的事象という言葉を目にしますが、両者の事象は何が違うのですか。わかりやすく説明して下さい。



なるほどシリーズ1で述べたように力や変位などの物理量が時間的に変化しない事象を静的事象と言ひ、物理量が時間的に変化する事象を動的事象と言ひます。物が止まっている状態か、動いている状態か・・・身近な事例を挙げて説明します。

(A)はブランコが停止し、何も力が加わっていない初期の状態です。

(B)は一定の力を加えた結果、 θ_0 の角度まで傾き、その状態で力を保持している場合で、この力を保持している状態は静的事象です。

(C)は(B)の状態から突然力を抜いた場合で、ブランコは停止状態の位置から $\pm \theta_0$ の振幅で揺れを繰り返します。この状態は動的事象です。

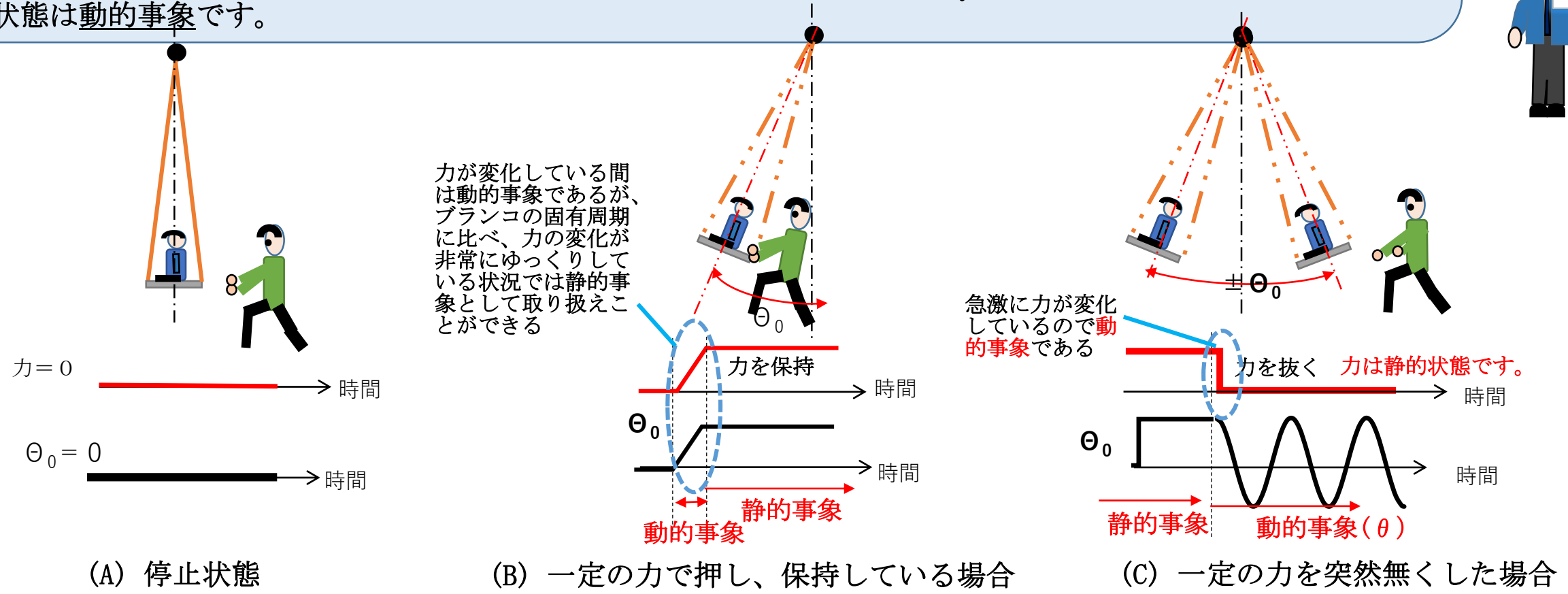


図1 ブランコを手で押した場合や突然手を放した場合のブランコの揺れるイメージ図 2

次にバネで吊下げられた質量の動きについて考えてみます。図2において、
 (A)はバネのみを吊下げた場合で、静的事象です。(バネの質量は無いものと考えています。)
 (B)は(A)の状態に質量を吊下げた場合です。質量には重力加速度による力(自重)が作用し、その結果変位します。
 この状態は静的事象です。
 (C)は(B)の状態で質量を打撃した場合です。打撃以前は質量は揺れないので、静的な事象です。一方、打撃後は
 質量に打撃力が作用した結果、質量は揺れ始めます。この状態は動的な事象です。ただし、打撃力がなくなった
 後の打撃力は静的な事象です。

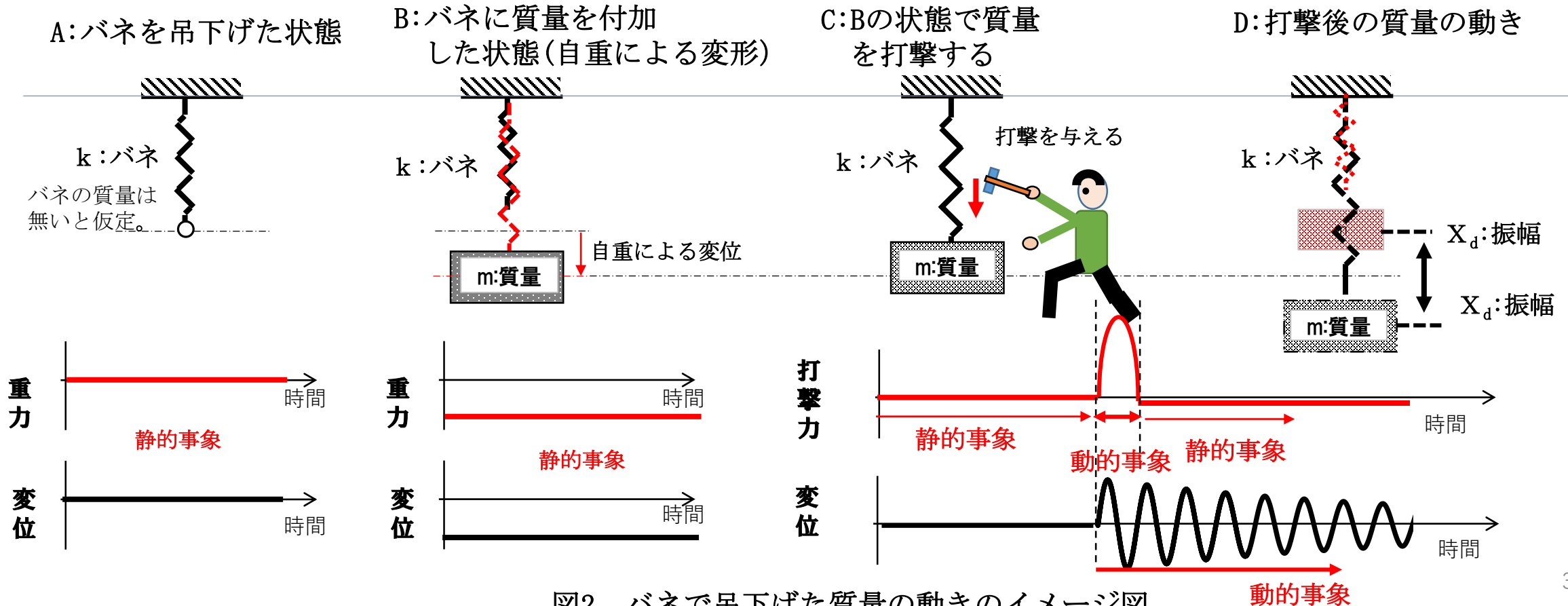


図2 バネで吊下げた質量の動きのイメージ図

静的事象と動的事象の違いは判りました。何かしら動きがある状態が動的事象で、静止している状態が静的事象ですね。ところで、設計者が構造物などを設計する際、静的事象に対する検討だけではどのような問題が生じるのでしょうか？

そうですね。

本資料では静的事象と動的事象の性質について説明しましたが、例えば、力の大きさが同じである静的力と動的力に対し、変位などの絶対量がどのようになるかについては説明していませんでした。

結論から言えば、なるほどシリーズ1で述べたように、力の大きさが同じであっても動的な変位振幅は静的な変位より大きくなる場合があります。なぜならば、動的事象の場合、時間に関係する概念(振動数あるいは周期)を考慮することが必要で、顕著な例として、力の振動数と構造物が持っている固有の振動数が一致すると共振と言う現象が起こり、振幅が極端に大きくなります。

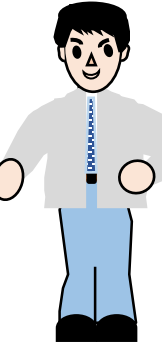
従って、静的条件に対しては強度的に充分であったものが、動的力が作用したため破壊や損傷が生じた例は数多くあります。

例えば、地震による建物や橋など構造物の崩壊や、流体力によるタコマナローズ橋の崩壊、もんじゅの温度計さや管の損傷例などは静的力に対する強度は充分であったにも関わらず、動的力が作用し、損傷に至った例です。

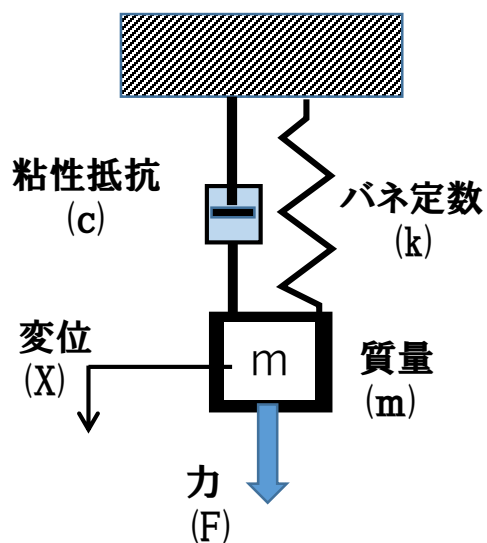
具体的に静的事象と動的事象に対する変位(振幅)の違いを調べるため、図3(次ページ)は一自由度振動系に静的な力と動的な力(SIN波で振動数は変化する大きさが一定の力)が作用した場合に対する変位の図を示します。

- ・ 静的力の場合は力と変位は時間が経過しても一定ですが、
- ・ 動的力の場合は力の振動数が固有振動数に近づくと変位振幅は大きくなり、両振動数が一致すると共振現象が生じ、その時、変位振幅は最大値に達し、さらに力の振動数を上昇すると変位振幅は小さくなります。

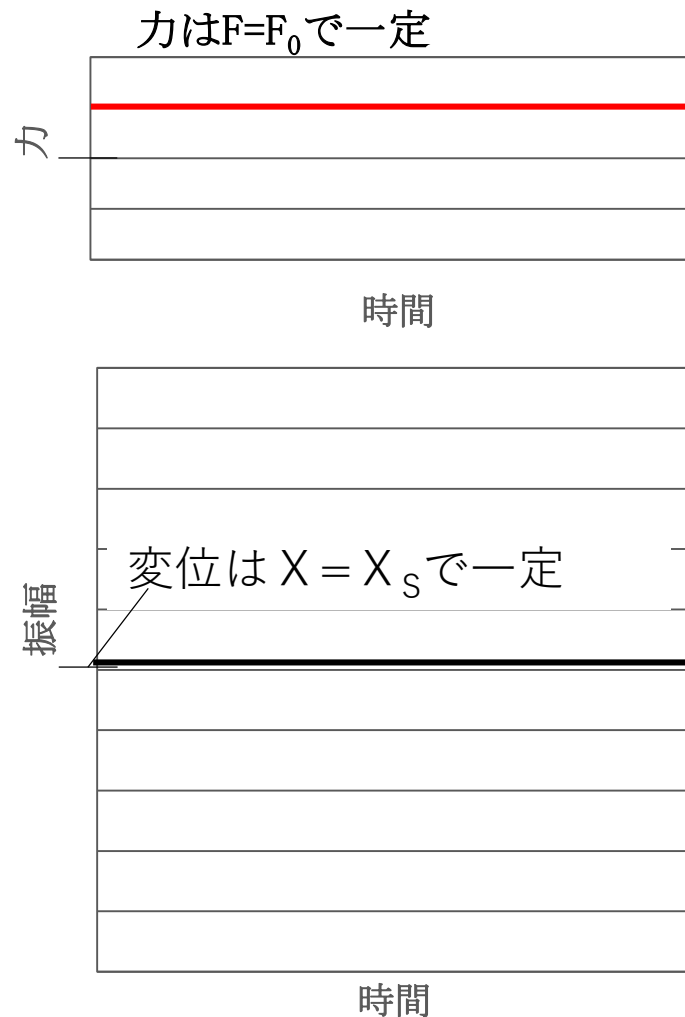
共振状態では非常に大きな変位振幅になっていることがよく判ります。



静的事象



力：
 静的事象 $F=F_0$
 動的事象 $F=F_0 \sin \omega t$



動的事象(正弦波掃引加振結果)

力は $F=F_0 \sin \omega t$ で時間とともに振動数を上昇した場合
 $\omega=2\pi f$ 、 f : 力の振動数

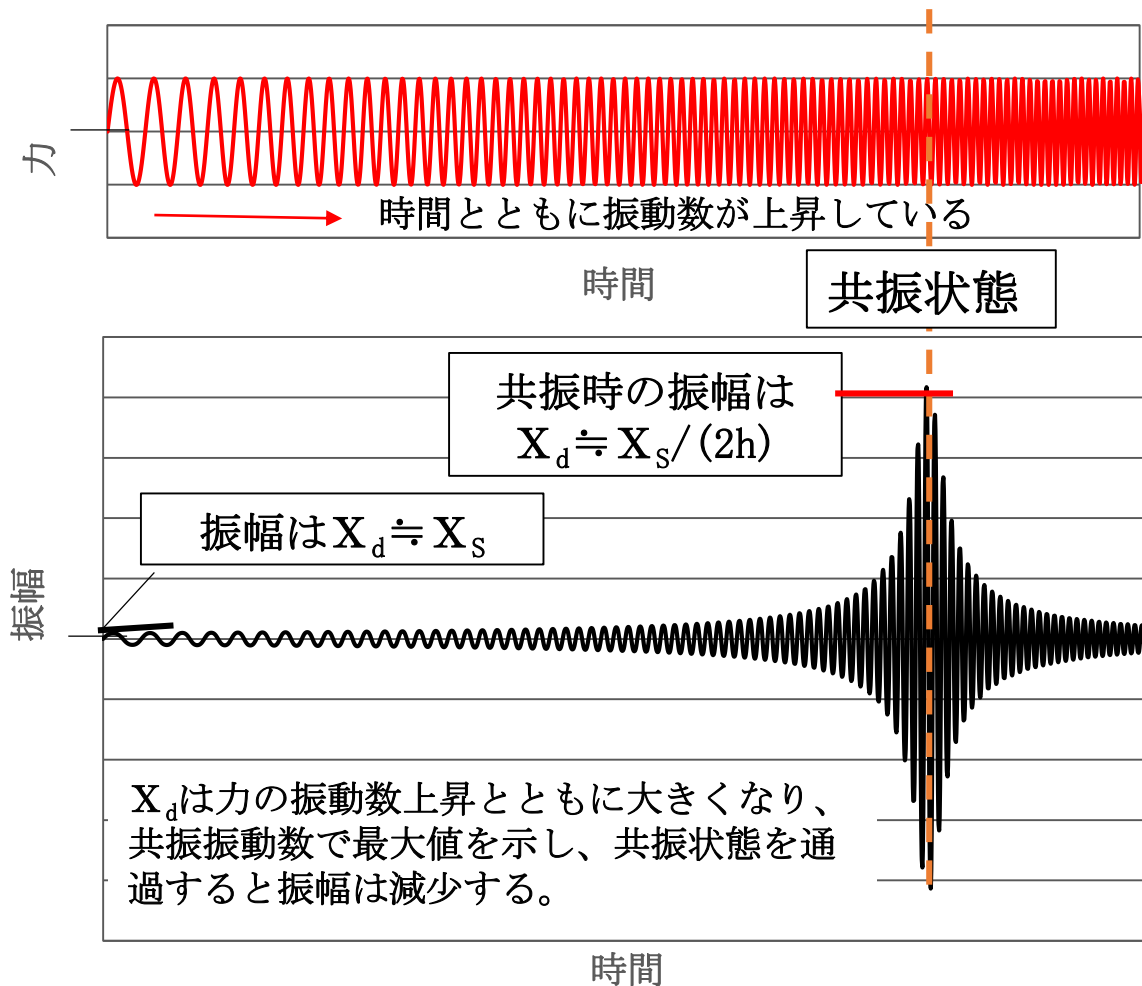


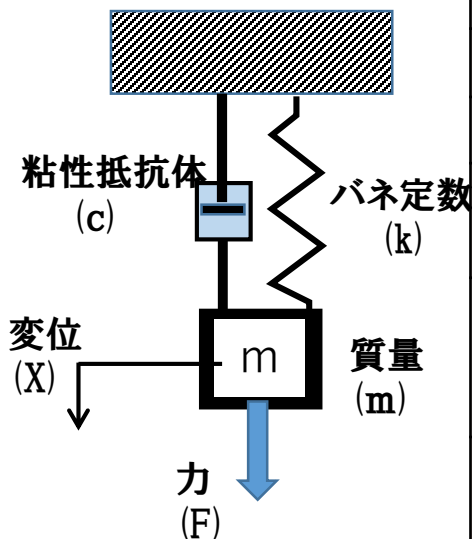
図3 一自由度振動系に作用する静的荷重と静的荷重に対する静的変位と動変位の違い

表1は一自由度系に力Fが作用している場合の静的事象と動的事象に対する力の釣合いをまとめたものです。
釣合い式における両者の違いは抵抗力和慣性力を考慮するかしないかの違いです。



表1 一自由度振動系に対する力の釣合い

物理量	静的な取扱い	振動的な取扱い	備考
外力 F	時間的に変化しない。 $F = F_0$	時間的に変化する。 $F = F_0 \sin(\omega t)$	振動的な力を正弦波と仮定。
変位 X	時間的に変化しない。 $X = X_s$ 一定	時間的に変化する。 $X = X_d \sin(\omega t)$	
速度 V	速度変化はゼロ。 $V = 0$	時間的に変化する。 $V = \omega X_d \cos(\omega t)$	
加速度 α	加速度変化はゼロ。 $\alpha = 0$	時間的に変化する。 $\alpha = -\omega^2 X_d \sin(\omega t)$	
復元力: F_e =バネ定数*変位	考慮する。 $F_{se} = k * X$	考慮する。 $F_{se} = k * X$	
抵抗力: F_r =粘性係数*速度 = $c * X'$	考慮しなくて良い。 ∵速度変化がゼロ $F_r = 0$	考慮する。 $F_r = c * X'$ 便宜上、速度に比例する粘性力を考える。	X' は変位Xの微分
慣性力: F_i =質量*加速度 = $m * X''$	考慮しなくて良い ∵加速度変化がゼロ $F_i = 0$	考慮する。 $F_i = m * X''$	X'' は変位の2回微分
力の釣合いの式	$F = F_e + F_r + F_i$ = $k * X$ フックの法則	$F = F_e + F_r + F_i$ = $k * X + c * X' + m * X''$ 運動方程式	
質量の変位	$X = F_0 / k = X_s$	$X = X_d \sin(\omega t)$ $X_d = X_s * \frac{1}{\sqrt{\{1 - (\omega / \omega_0)^2\}^2 + \{2h(\omega / \omega_0)\}^2}}$	



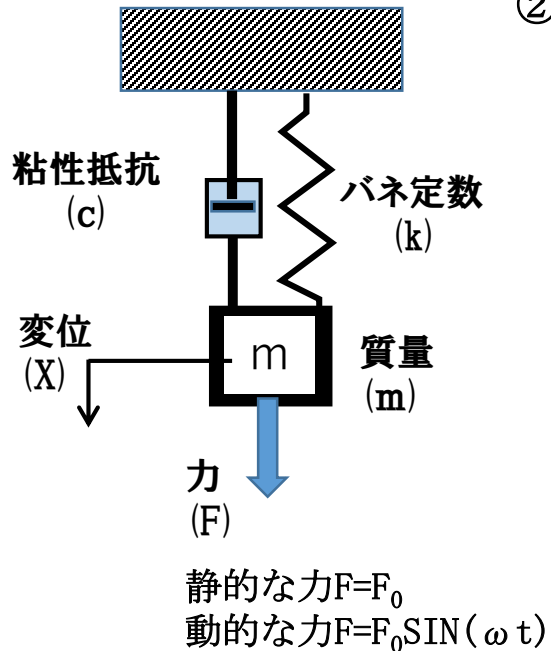
$\omega = 2\pi f$
 $\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{k/m}$
 $h = c / (2m\omega_0)$: 減衰比
 f : 力の振動数
 f_0 : 固有振動数

表 1 に示すフックの法則、あるいは運動方程式から、質量に力が作用した場合の変位量を具体的な数値を当てはめて求め、比較します。



①静的事象(力が一定)の場合、変位はフックの法則から、 $X_s = F_0/k$ で求められます。
バネ定数 $k=1000\text{N/m}$ 、力 $F_0=10\text{N}$ と仮定すると変位 X_s は $X_s = 10/1000 = 0.01\text{m}$ です。

②動的事象(力が正弦波で変化する)の場合、変位は運動方程式を解いて求めることができます。
ここでは、途中の計算式は省略しますが、最終的に変位は以下の式①または式②のようになります。



$$X = X_d \sin(\omega t)$$

$$X_d = X_s * \frac{1}{\sqrt{\{1 - (f/f_0)^2\}^2 + \{2h(f/f_0)\}^2}} \quad \text{式①}$$

$$X_d / X_s = \frac{1}{\sqrt{\{1 - (f/f_0)^2\}^2 + \{2h(f/f_0)\}^2}} \quad \text{式②}$$

$X_s = F_0/k$ (静的な変位)
 $f = \omega / (2\pi)$ 力の振動数
 $f_0 = \omega_0 / (2\pi)$: 固有振動数
 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$
 $h = c / (2m\omega_0)$: 減衰比

バネ定数 $k=1000\text{N/m}$ 、力 $F_0=10\text{N}$ と仮定し、また、粘性抵抗を $C=0$ ($h=0$) と仮定すると、

- ・力の振動数 $f=0\text{Hz}$ の場合、変位振幅は上式より、
 $X_d = X_s = 10/1000 = 0.01\text{m}$ となり静的事象の場合と同じになります。
- ・しかしながら $f=f_0$ (この状態は共振現象と言います)の場合は上式より
 $X_d = X_s / \text{ゼロ}$ となり、変位(振幅)は無量大になります。

前ページの例では、**静的事象では0.01mm**しか変位しないのに対し、動的事象における粘性抵抗をゼロとした結果、共振時には**変位振幅が無量大**になりました。

これから判るように動的事象では共振と言う現象が発生する可能性があり、その場合は非常に大きな振幅になり、静的な設計検討を行うだけでは不十分であることになります。

ちなみに、粘性抵抗がゼロと言う状態は現実的ではなく、いくらかの値を持っているので、実際には共振現象が発生しても振幅が無量大になることはありません。

そこで、減衰比 h の現実的な値として0.5%~2%程度と仮定すると、共振時には式①より変位振幅は **$X_d = 100X_s$ (1mm) ~ $25X_s$ (0.25mm)** になります。この値は静的な変位の100倍~25倍に相当します。共振現象が起こると物が壊れやすいという事がお判りいただけたでしょうか。

図4(次ページ) は外力の振動数を変化させた時の変位振幅と静的な力による変位に対する応答の倍率(式②)を示しています。これから判るように動的事象では上に述べた共振以外の振動数範囲においても動的力に対する変位振幅は静的力に対する変位より大きくなり、静的設計上は強度的に大丈夫でも動的設計上では破損する可能性があるわけです。

共振状態が生じた場合における動変位振幅を求める式は非常に簡単な式(式③)表されるので覚えておかれると便利です。

$$X_d = X_s / (2h) \quad \text{式③}$$

または $X_d / X_s = 1 / (2h)$ 式③' . . . 共振時の変位振幅/静的な変位(共振倍率)は減衰比に反比例する。
減衰比が小さければ小さいほど振幅が大きくなります。



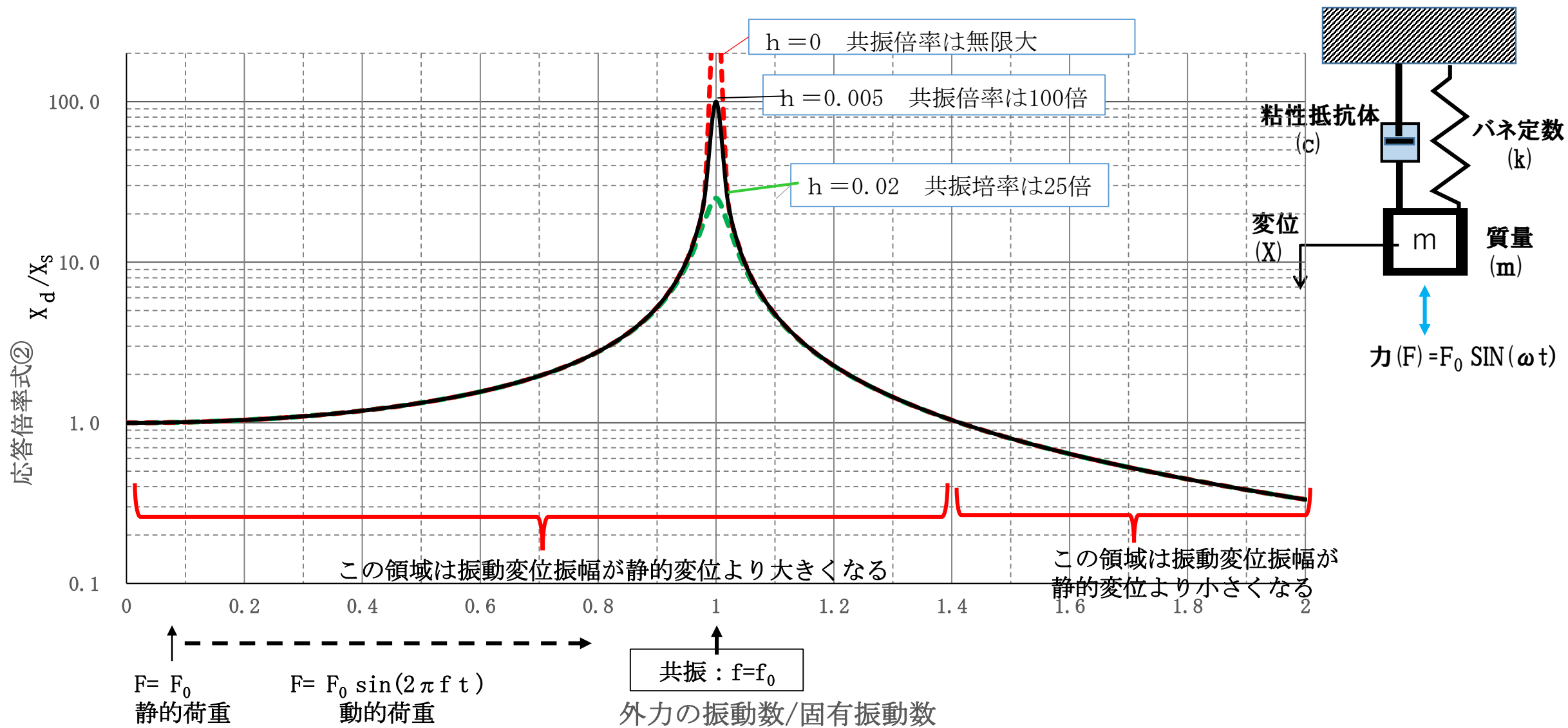
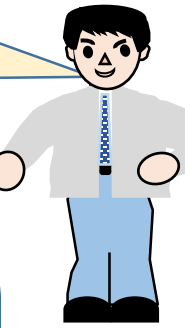


図4 (力の振動数と固有振動数の比率)と(動的変位と静的変位の比率)の関係

動的事象(振動)を取り扱う上では対象物の特性として重要なのはまず固有振動数の把握ですね。固有振動数が判れば動的強制力と共振するかしないかの判断が可能になると云うことですね。
その他に重要な性質はありますか？



振動特性として把握すべき重要な3項目は①固有振動数、②固有振動モード、③減衰比です。
このうち、固有振動数と振動モードは有限要素法などの数値計算で求めることができます。
一方、減衰比の値は①物を構成する材料や形状、②製作、組立方法(ボルト組立、溶接組立、一体加工など)、③付帯物の有無などの影響を受けるため、減衰比を正確に把握するには実物を用いた振動試験を実施することが必要です。
しかしながら、設計段階において、すべての物に対し試験するのは現実的ではありません。
そこで、現実的には類似構造体に対し計測された減衰比のばらつきを考慮し、安全側となるような減衰比(データ中の最小減衰比など)を用い、健全性を検討することになります。
図5は減衰比が変位振幅に及ぼす影響の概念図です。
尚、機器や配管などに対する具体的な減衰比の値についてはなるほど！シリーズ8で述べることにします。

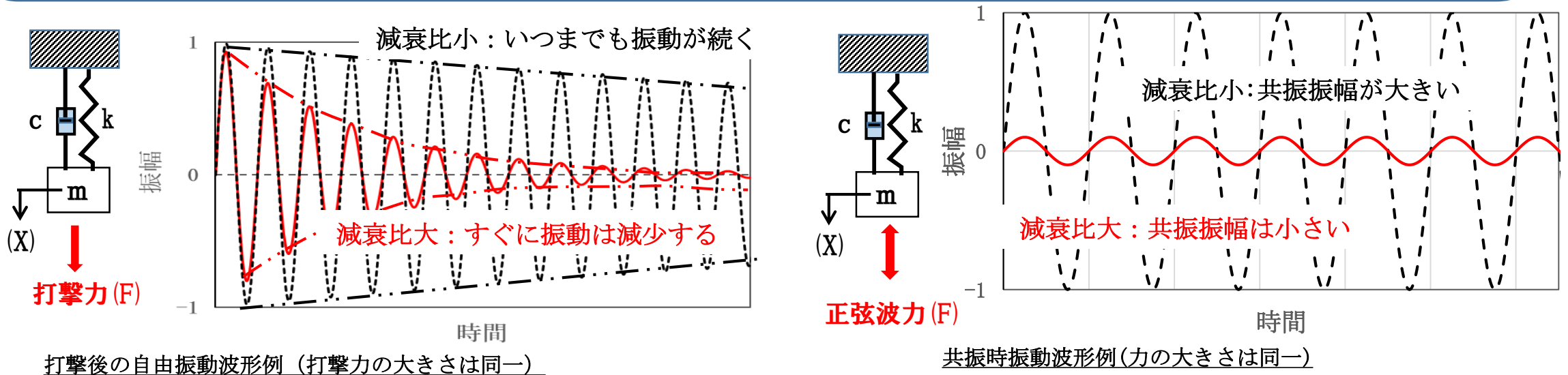


図5 減衰比の違いによる振幅の違い概念図

減衰比が重要なのは前述の式③や図4で示されるように共振した場合の振幅に大きな影響を与えるからですね、
それでは固有振動モードが重要な要素なのは何故でしょうか。

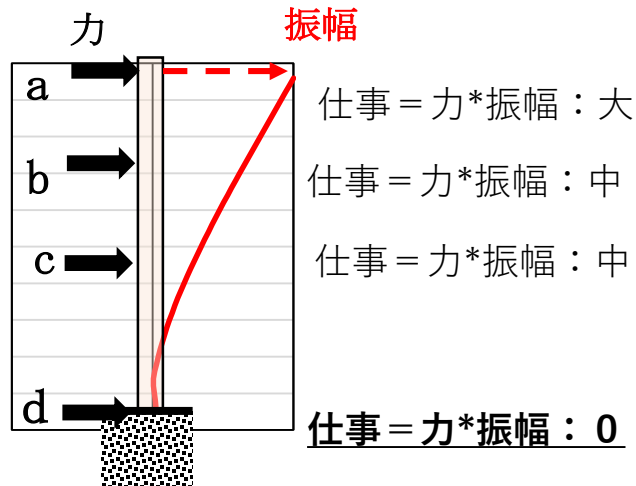
減衰比が重要なのはお考えの通りです。

固有振動モードが必要な理由を図6を参考に説明します。図6は片持ち梁に動的な力が作用している状態です。

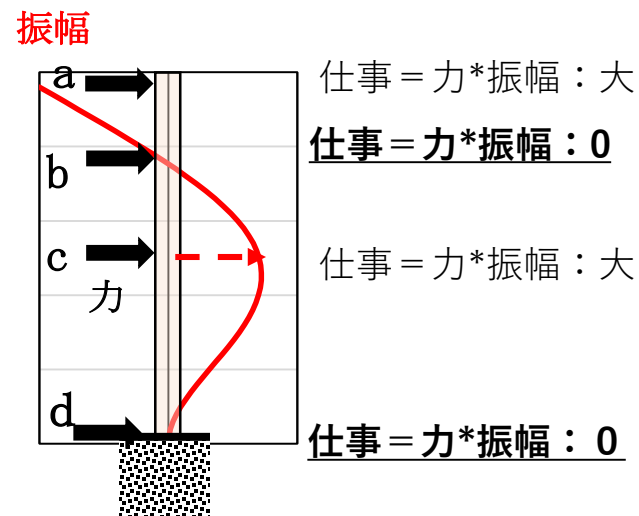
(A)図は一次振動モード、(B)図は二次振動モードに対するものです。両図において力の作用点がaの場合(振動モードの腹)は力は梁に対し、力*変位の仕事をすることになりますが、作用点がbの場合(振動モードの節)は力が作用しても振幅はゼロなので力は梁に対し、力*ゼロ=0となり仕事をしないことになります。

力が作用する位置が振動モードの腹にあれば大きな振動が発生し、振動モードの腹であれば振動しないことになります。

従って、力の作用位置は振動の振幅に影響を及ぼすため、重要な要素になります。



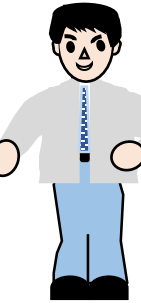
(A)図 一次振動モード



(B)図 二次振動モード

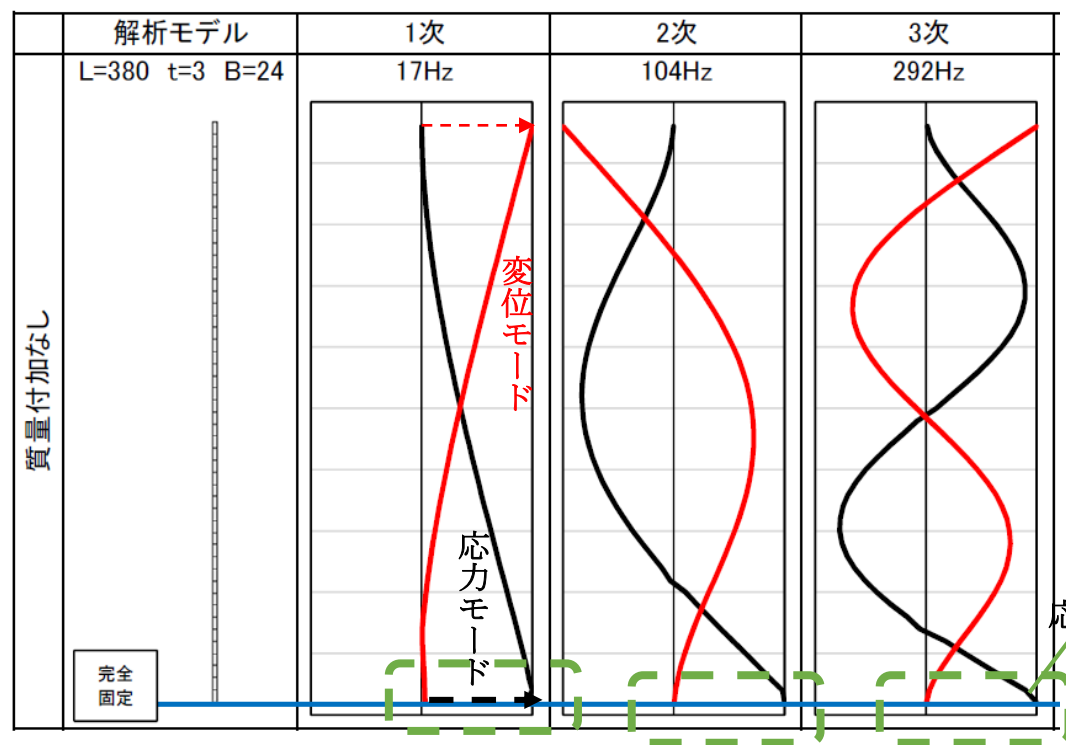
図6 力の作用位置と振動振幅の関係

例えば、打撃試験においてa点やc点に打撃を加えた場合は一次振動モードと二次振動モードの振動数は現れるが、b点に打撃を加えても二次振動モードは現れない。打撃点がd点の場合は一次も二次振動モードも現れない。

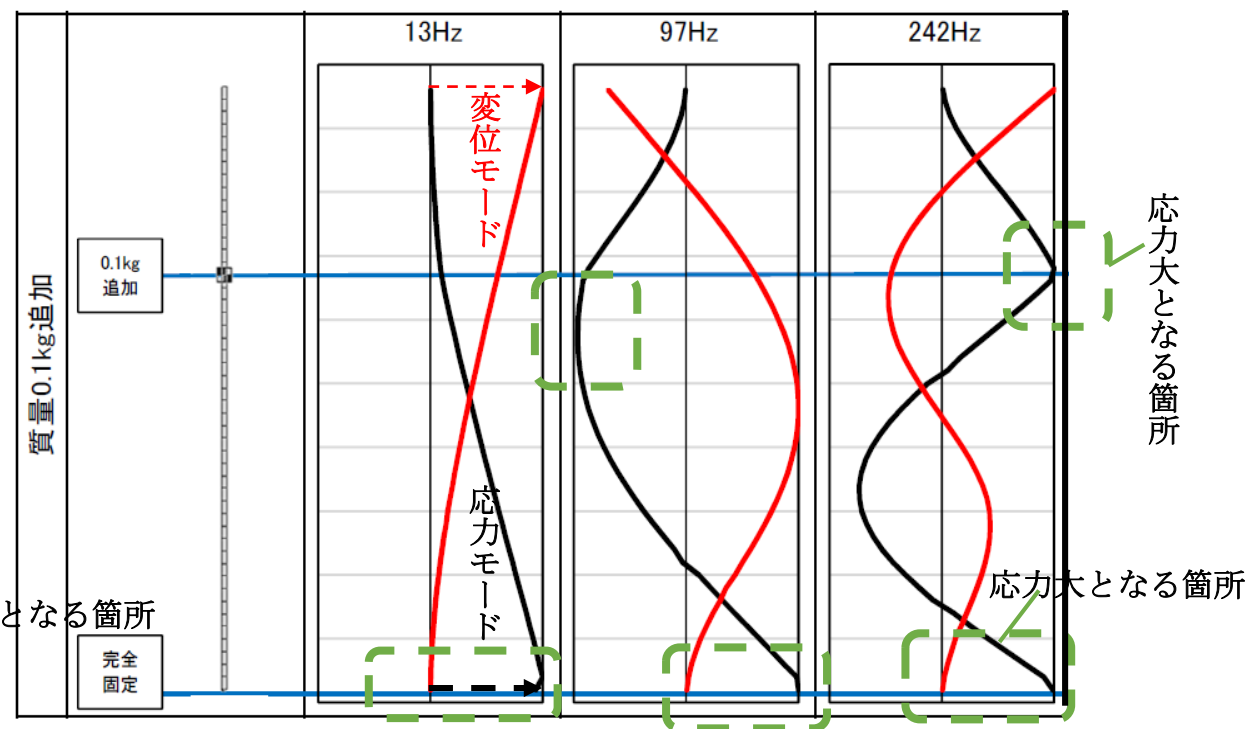


少し横道にそれますが、図7は片持ち梁に対する変位振幅モードと応力モードの関係を示すものです。(a)は均一断面梁に対する解析結果ですが、一次、二次、三次振動に対する応力モードの最大値は固定端部において発生しています。一方、(b)は均一断面梁の一部に質量を付加した場合です。この場合には二次と三次振動に対する応力モードでは固定端以外の質量付加位置近傍においても大きな応力が発生する事になります。

静的な荷重に対する歪分布形状は一次振動応力モードにほぼ一致すると考えられるため最大応力は固定端部で生じますが、動的荷重に対する歪分布では高次の振動モードにおいて、固定端部以外の箇所においても大きな応力が発生する事があります。翼などの変断面形状のものが固定端部以外の先端部などで破損する場合がありますが、これは高次の振動モードにおいて共振している可能性を示唆しています。従って、振動モードを把握することが重要になります。



(a) 均一断面梁変位モードと応力モード図



(b) 質量が付加された均一断面梁変位モードと応力モード図

図7 変位モードと応力モードの違い