なるほど！シリーズ1

振動とは何か？
振動で物が壊れやすいのはそう言う事か？

「これだけ知っていれば　ほぼ 大丈夫」

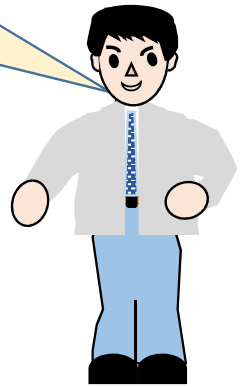
Sound & Vibration Research
国際振音計装株式会社
2017/8 IKE

振動問題に悩まされている人、初めて振動に携わる人を対象に、振動で物が壊れやすいのは何故かという視点から、振動と強度についてわかり易くお話します。

なお、振動の事をより詳細を知りたい方には物足りない内容になっていますのでご了承下さい。

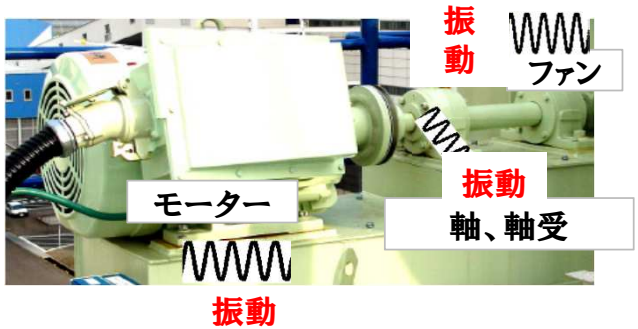
振動って何でしょう？

地震で家が揺れる、自動車で凸凹道を走る時に体が揺れるとかの揺れも振動だと思いますが。

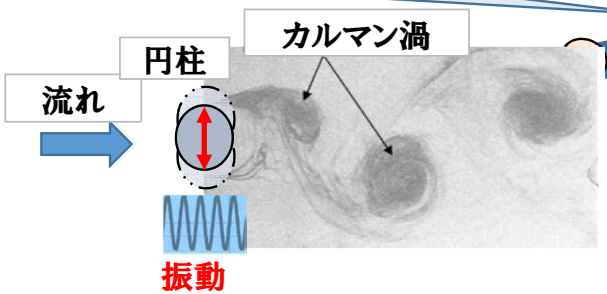


そうです。
　地震で家が揺れたり、自動車で凸凹道を走った時の体の揺れが振動です。 この他にも風で旗や木々が揺れたり、洗濯機やモーターなどの電気製品を運転した時の音や手に伝わる揺れなども振動です。 また、ギターの弦を弾いた時の音、笛を吹いた時の音なども振動です。

地震による家の揺れ

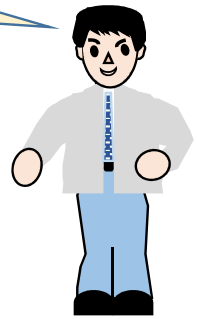


モータ･軸受、ファンなどの振動



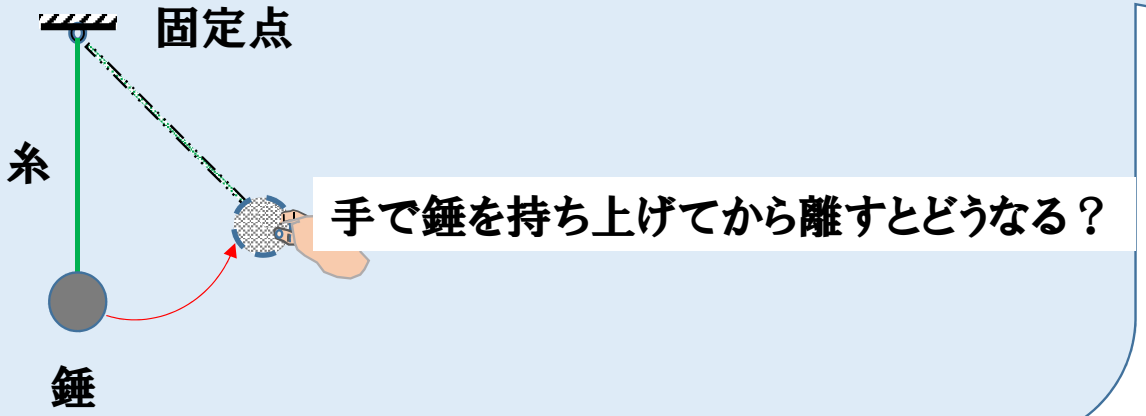
流体流れによる円柱の振動

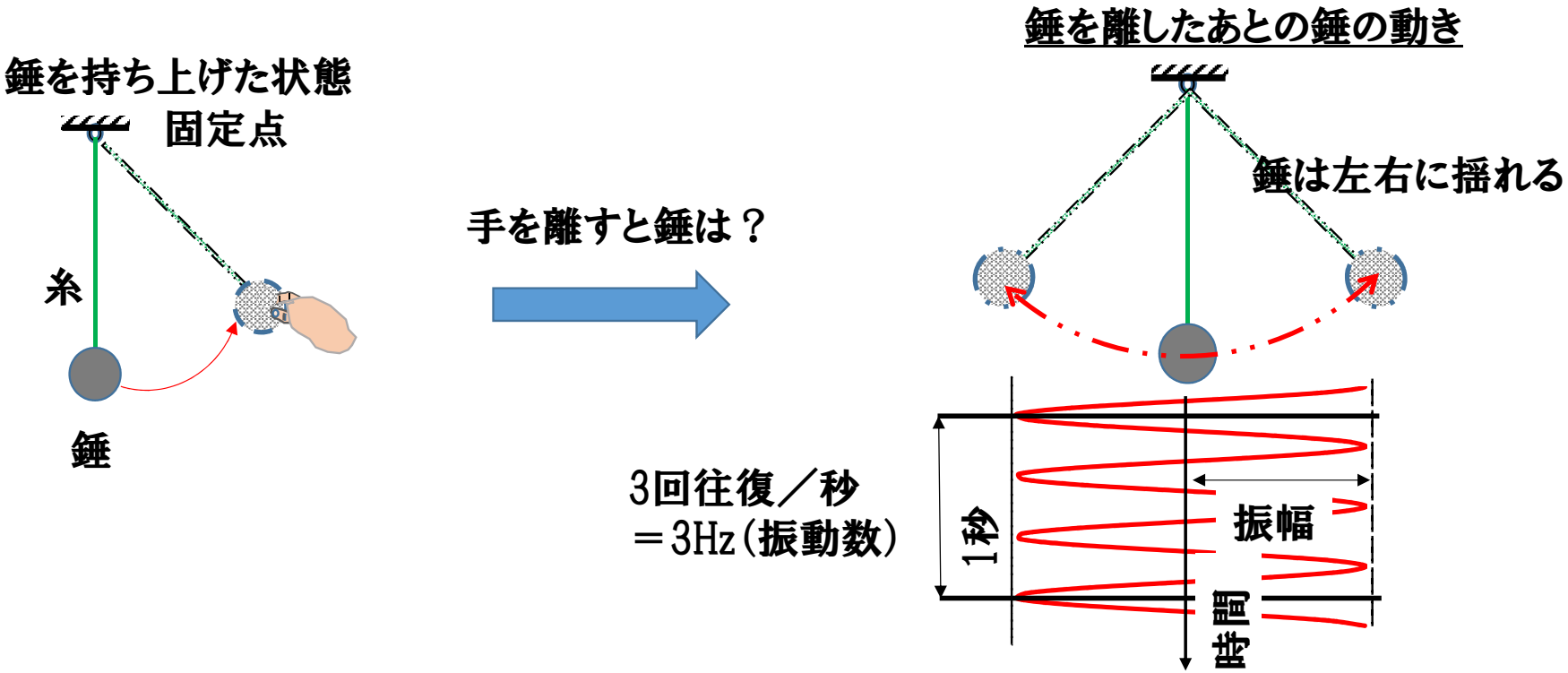
振動の本を読むと振動数とか固有振動数、振幅、振動モード、減衰比などの言葉が出てきます。
それらの言葉をわかりやすく説明してください。



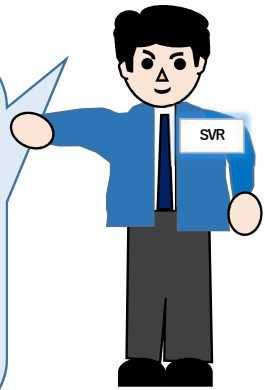
まず、振動数、振幅に付いて振り子やバネに吊り下げた錘の動きを例にとって見ましょう。

下図のような振り子の動き（運動）をイメージして下さい。
錘を持ち上げた状態から離した後の動きはどのようになるでしょうか？

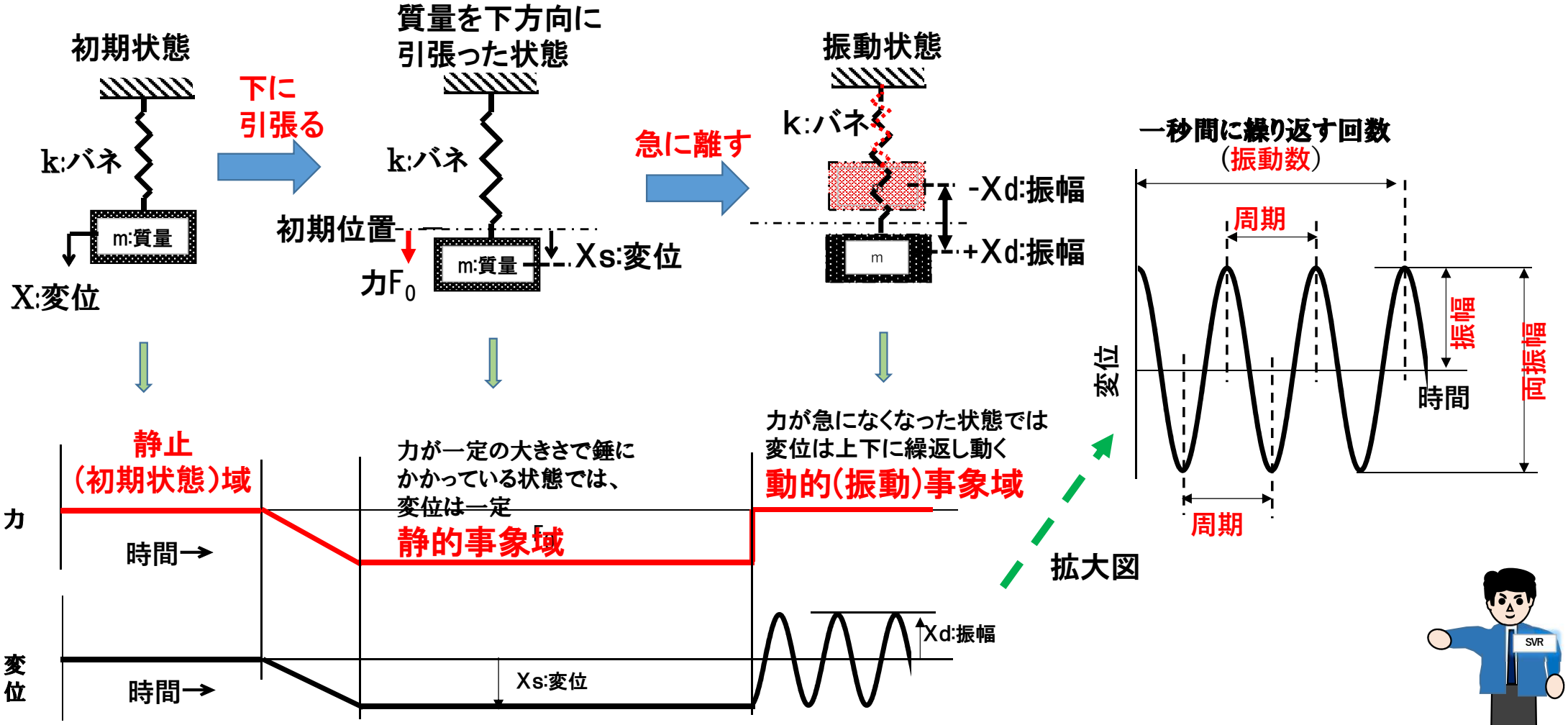




図に示すように振り子の錘を手で引っ張り、手を離すと錘は左右に揺れ始めます。その揺れはしばらく続き、いずれは止まります。　錘が動いているとき、**一秒間に何回揺れるかを表す指標が振動数**で、この場合のように、錘が**自由に揺れている時の振動数を固有振動数**と云います。言い換えれば錘の揺れやすい振動数が固有振動数です。
また、振り子の錘が**揺れる大きさを表す指標を振幅**と云います。



もう一つの例：バネに吊り下げた錘（質量）の動きについて考えてみます。



力と変位の状態イメージ図

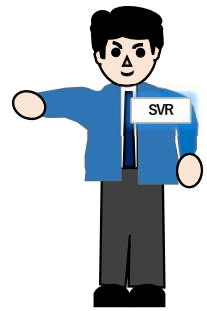
振動数と振幅に付いて良くわかりました。
振動数と固有振動数はどのように違うのですか？

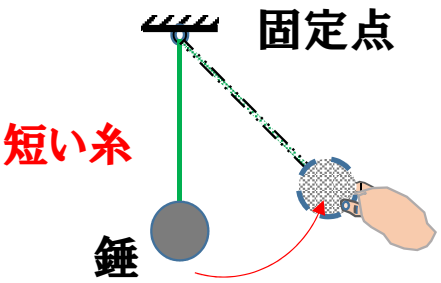
振動数、固有振動数はともに一秒間に揺れが何回繰り返すかの回数を表しています。
繰返し数を表す意味においては振動数と固有振動数は同じように使われますが、固有振動数は対象としている物自身が持っている特性の一つで、その物の形状、材質、大きさ、構造などで決まる固有の振動数のことを固有振動数と云います。
それに対して振動数は広い意味に使用します。

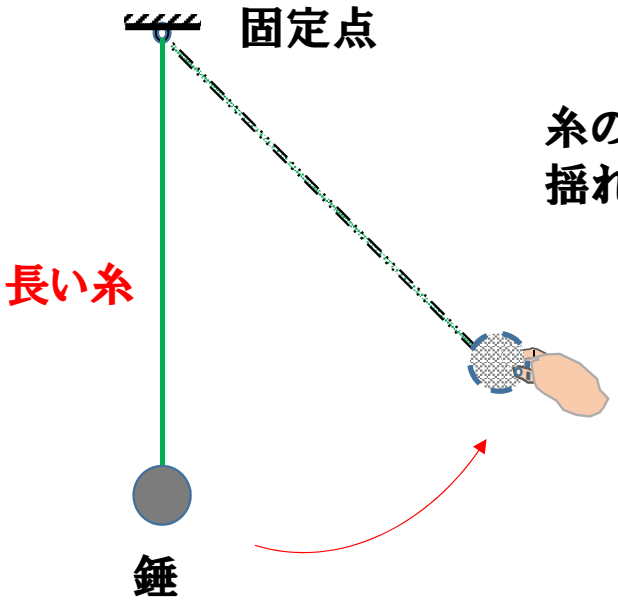
物に繰返し力が働いている場合の振動では振動数（強制振動数）を使い、力を取り除いた後も振動している場合は固有振動数を使います。

それでは次に振り子とバネで吊り下げた錘の場合の固有振動数について調べてみます。

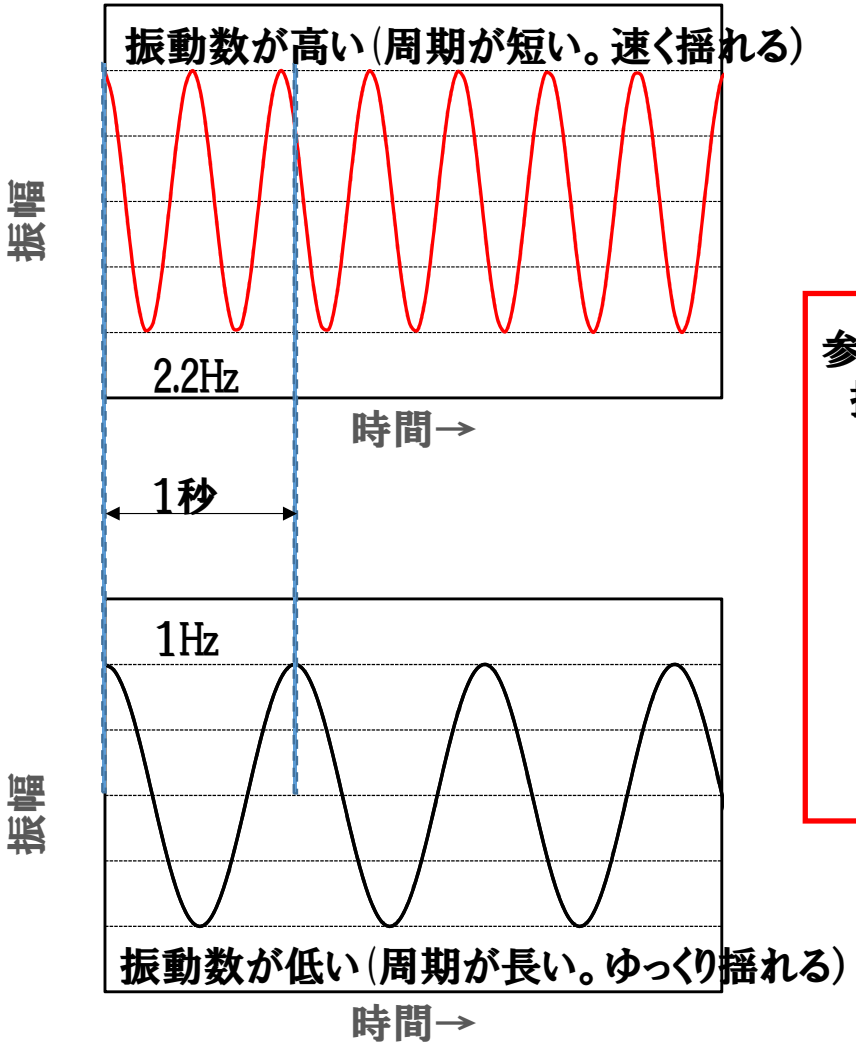
振り子の場合の<u>固有振動数は振り子の長さ</u>によって決まります。
錘の<u>重さを変えても</u>振り子の<u>固有振動数は変わりません</u>。







糸の長さが違うと
揺れ方は変化する？

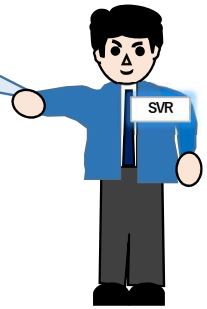


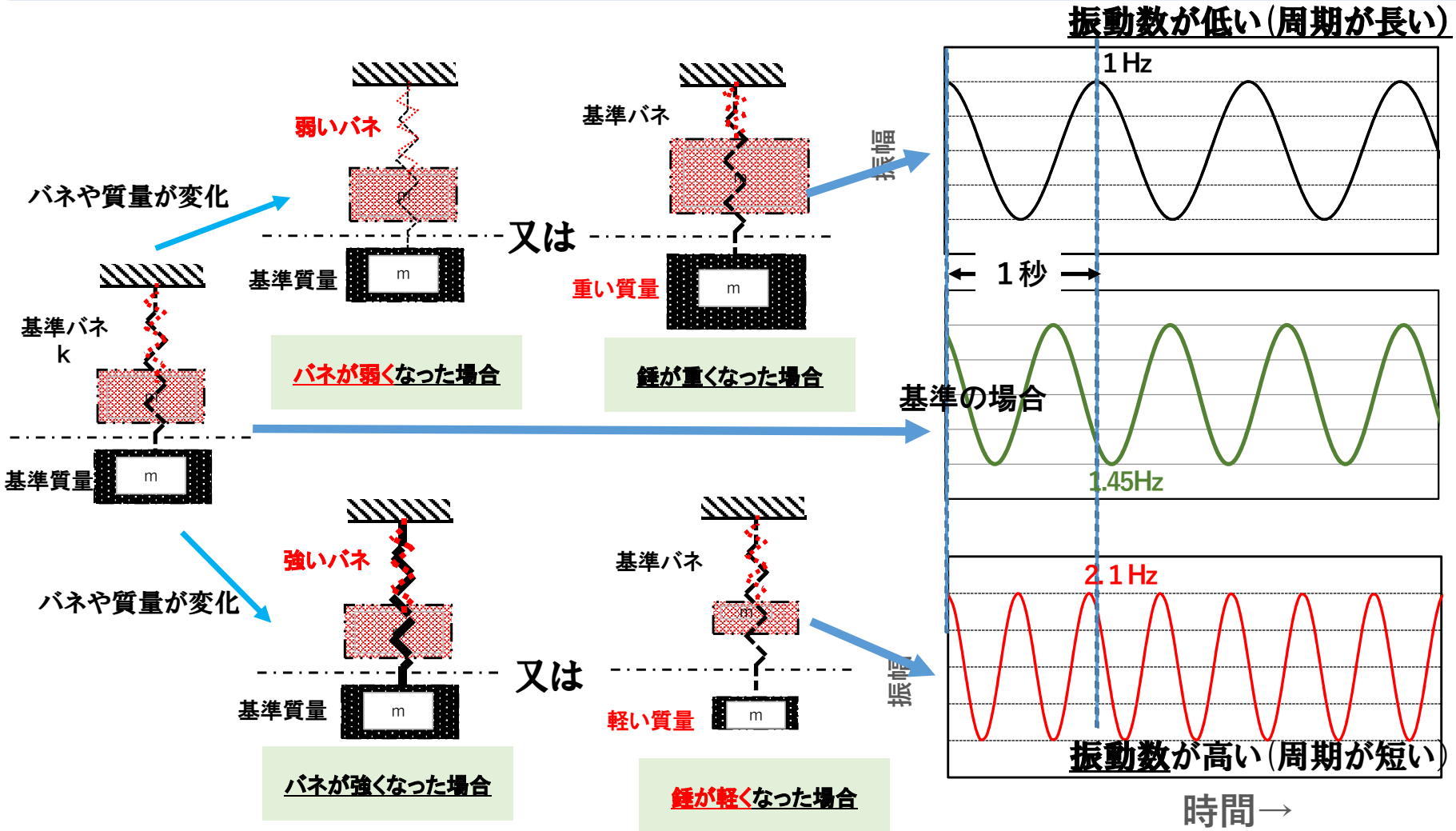
参考
振り子の固有振動数

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

g：重力加速度
L：振り子の長さ

バネに吊り下げた錘（質量）の場合、固有振動数はバネの強さや錘の質量によって変化します。



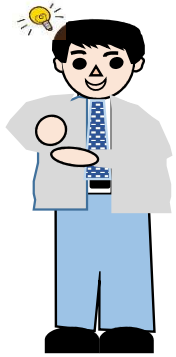


参考
固有振動数

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

k：バネ定数
m：質量

振動数と固有振動数の使い分けについてもわかりました。
例えば、物に繰返しの力（振動数が10Hzとします）が働いていて、その力により物が10Hzで振動している場合は固有振動数とは云わないで、振動数と云うのですね。

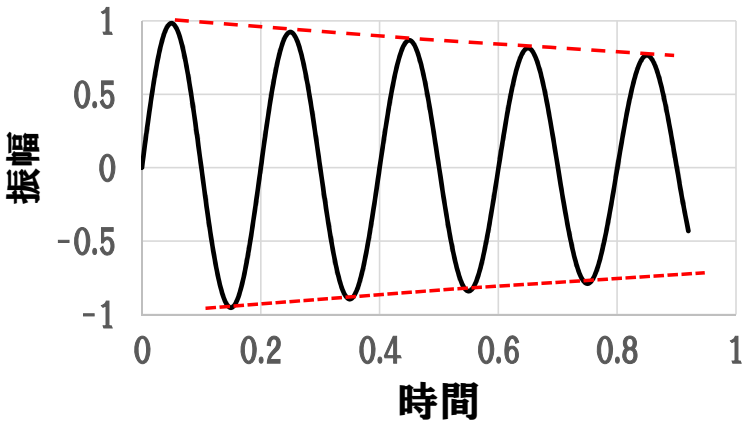


そうです。
その場合、物が振動している振動数は10Hzと云います。
物に力が加わって、その結果として物が振動させられている場合の振動数は強制振動数と言います。

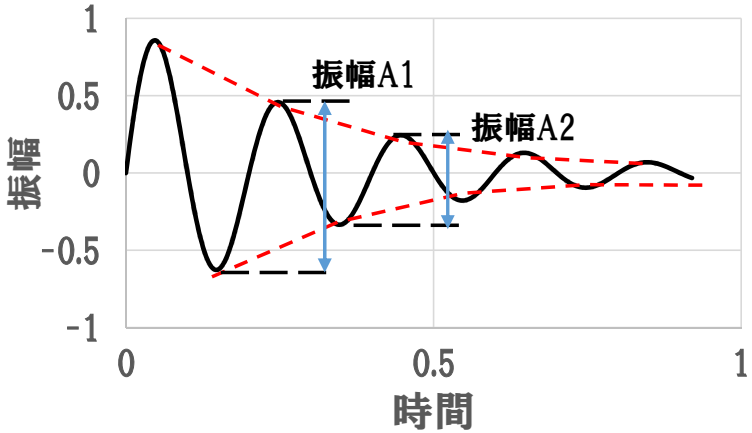
振動数、固有振動数、振幅の意味が理解できたと思います。
これらの言葉のほかに振動を取り扱う上で重要な言葉に減衰比と振動モードがあります。
次に減衰比と振動モードについて考えます。

減衰比は振動のし易さや収まり易さを表す指標です。
振り子の例では、
錘の振動が早く収まる場合には減衰比が大きい、なかなか収まらない場合は減衰比が小さいと云います。
（減衰比の定義は隣合う振幅比の自然対数の値（対数減衰率）を2πで割算した値です）。

振り子の例では減衰比は主に振り子を固定している部分（上部固定点）における摩擦が影響しているものと思われます。錘や糸の抵抗も少しは影響しますが、それは摩擦の影響に比べればわずかですので無視できます。



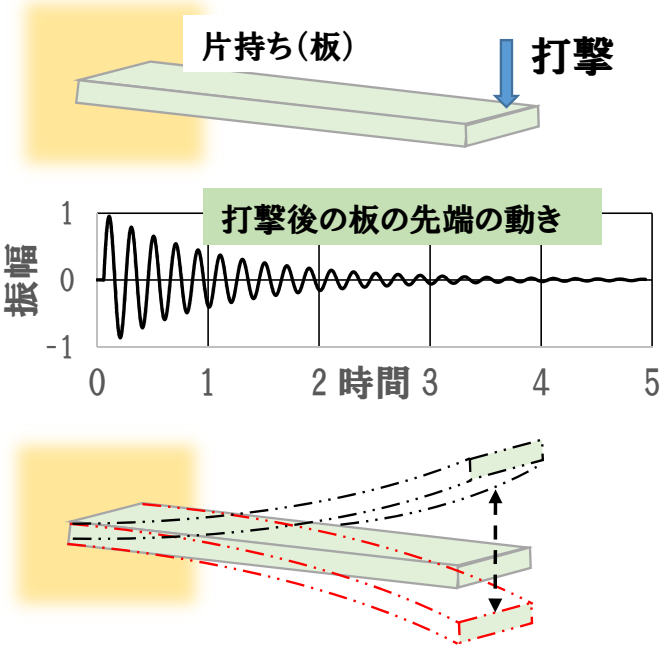
いつまでも錘が揺れている
（減衰比が小さい）



すぐに揺れが収まる
（減衰比が大きい）

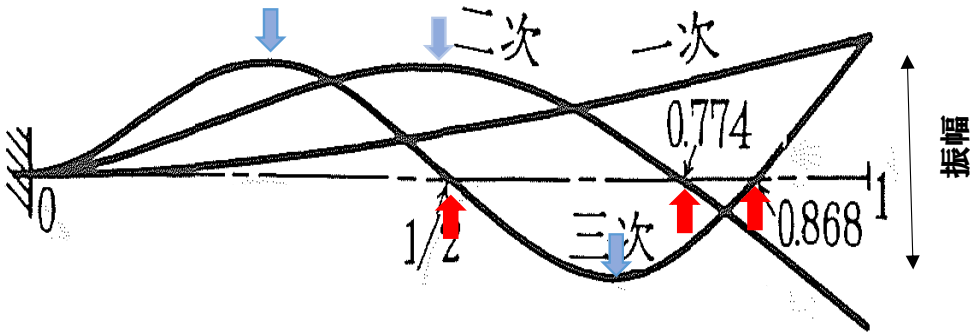
参考
対数減衰率（δ）
＝Loge(A1/A2)
減衰比（h）
≒δ/(2π)

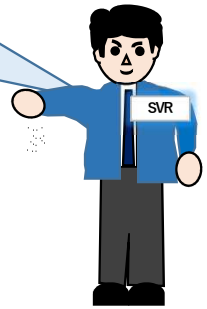
振動モードは物が振動している形のことを云います。固有振動数に対応する振動モードは固有振動モードと云い、強制振動しているときの振動モードは強制振動モードと使い分けることがありますが、一般的に振動モードと言うと固有振動モードを表す事があります。固有振動モードはその物が振動し易い形（エネルギーロスが少ない形）になり、質量分布、剛性分布に依存します。
例えば、一端を固定した板（梁）では下図の右側のような形になります。振動モードにおける節（振幅がゼロの位置）と腹（振幅が極大となる位置）は固有振動次数によって変わります。



決まった形で振動する。
決まった形が固有振動モード。

打撃後の方持ち梁（板）の振動する形の例

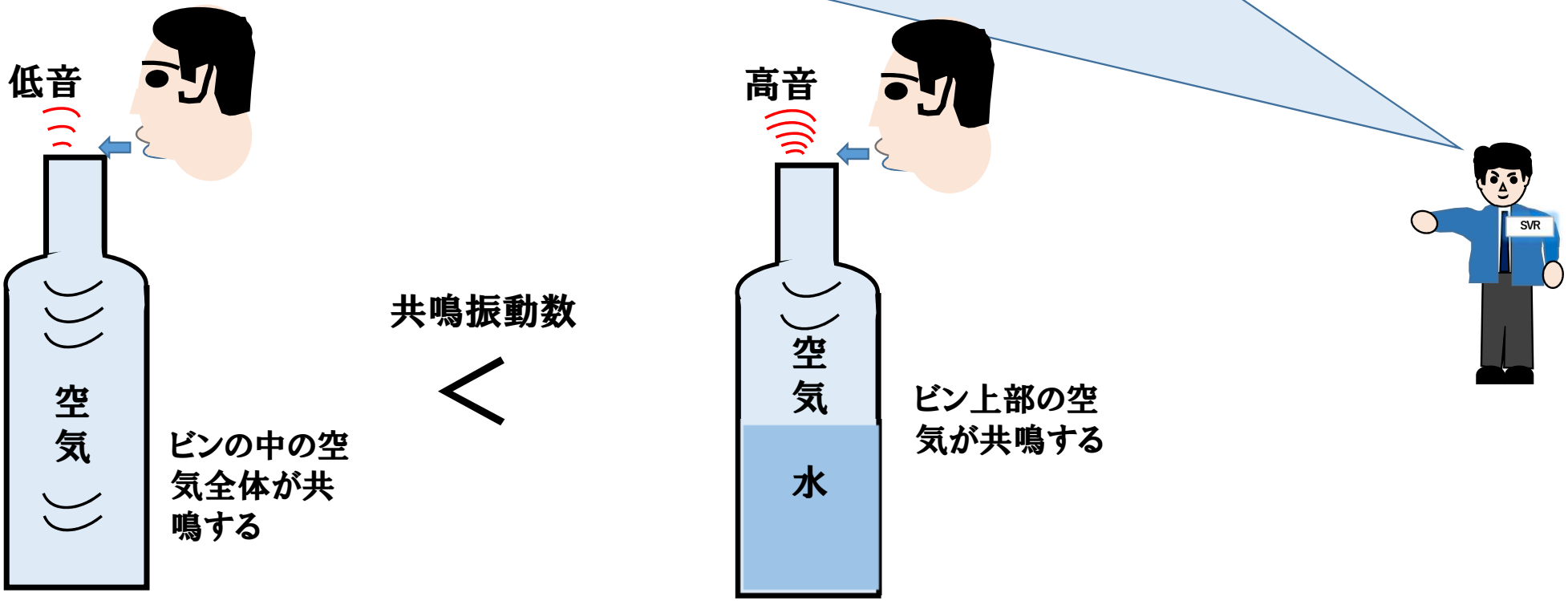




⬇:腹：振幅の大きい点
⬆:節：振幅が零の点（動かない点）

梁（固定－自由端）の場合の振動モード

今まで固体の例で振動について学んできましたが、気体や液体(空気や水) も振動します。
下図のようにビンの中身が空の場合と水が入っている場合で、ビンの蓋を取り外し唇で風を送ると音が出ることは経験されているでしょう。
この音が出るのはビンの中の空気が振動し、共鳴するからです。
ビンの中に水があると空気の占める体積が少なくなるので観察される音の振動数は空のときに比べ高くなります。



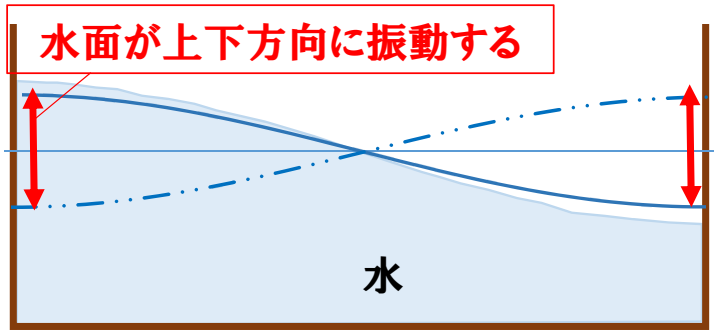
ビンが空の場合　　ビンに水が入っている場合

液体の振動の例

容器に水を入れ、容器を横にゆすると水面が上下に揺れます。この事象はスロッシングと云われるもので、液体の振動です。水面が上下する振動数はスロッシングの固有振動数で、容器の大きさや深さに依存します。

容器

(a)静止状態



容器

(b)容器を横方向に揺すった後の水面の状態

この他にも配管内の充満された水や油も固有振動数があります。この場合には固有振動数は配管の長さ、直径、液体温度、境界条件などに依存します。

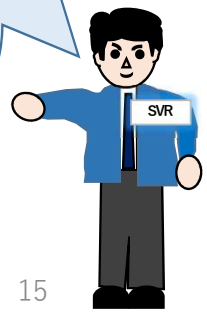
振動の基本が理解できたと思います。次は振動すると物が壊れやすい理由について考えます。

振動すると物が壊れやすい要因その1：

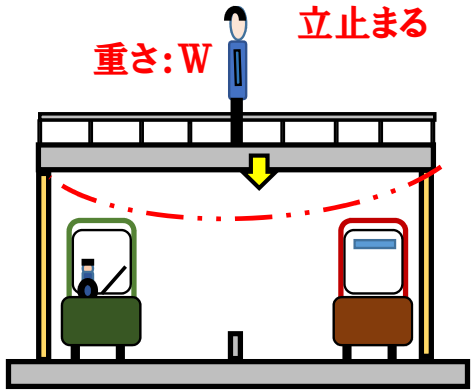
力の種類はいろいろあります。大きく分けると2種類になります。
①一つは時間の経過に係わらず力の大きさが変化しない力（バネで吊り下げた錘のところで説明した**静的事象における力**の働き方）
②もう一つは時間の経過とともに力の大きさや繰り返しの回数（振動数）が変化する力（以前説明しました**動的事象における力**の働き方）地震による慣性力、風や水の流れによる力、回転機械などのアンバランス力、衝撃、エンジンの爆発力などはこの動的力になります。

物に動的な力が作用すると物は揺れ始めます（振動します）が、その**力の振動数**が**特定の振動数**になると、**物の振動振幅は非常に大きく**なります。
このように**力の振動数＝物の固有振動数になった状態を共振**と呼んでいます。
物が共振すると振動振幅が非常に大きくなります。

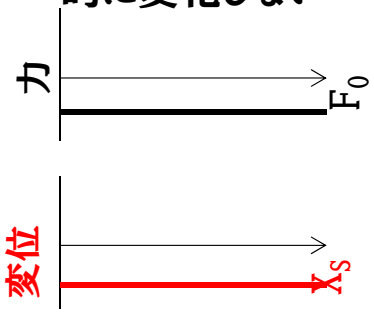
身近な例（歩道橋の例）で静的と動的な事象の違いをイメージしましょう。



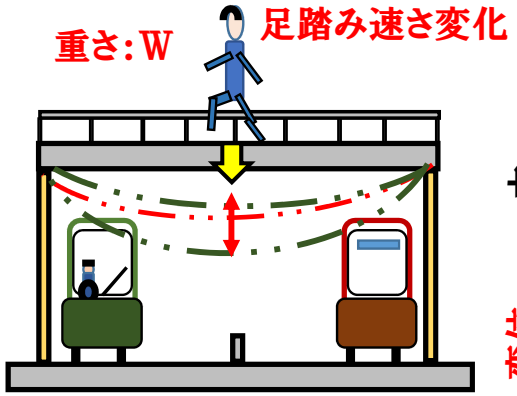
①静的な力の場合
（歩道にかかる力：F＝W=F_0＝一定）



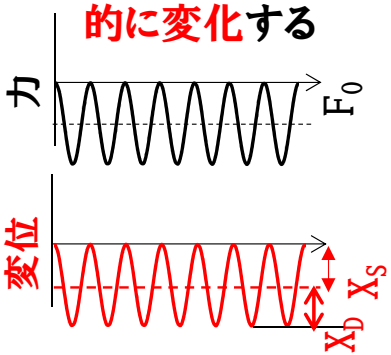
力や変位は時間的に変化しない



②動的な力の場合
歩道にかかる力：F(t)=W＋F_0SIN(2πｆｔ)



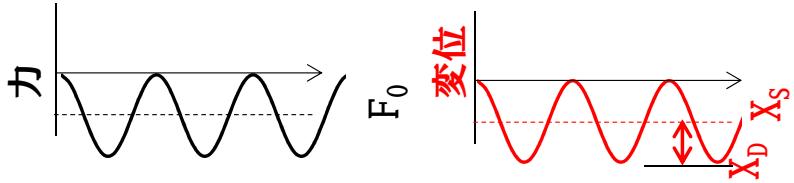
力や変位は時間的に変化する



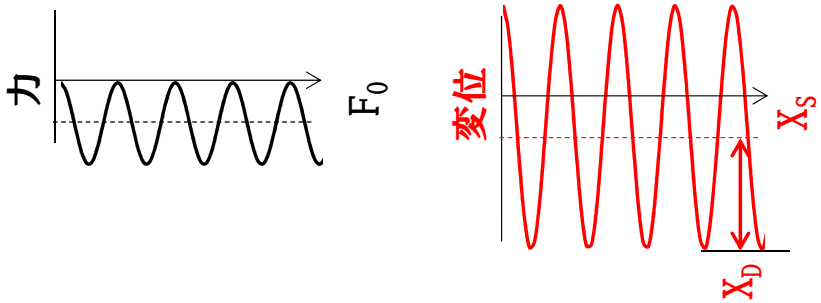
足踏みの速さを変化した時の力と変位（振幅）

足踏みを速くしていく

①ゆっくりと足踏みした場合

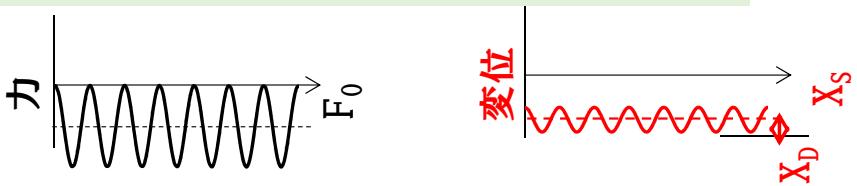


②歩道橋の固有振動数に合わせ足踏みした場合



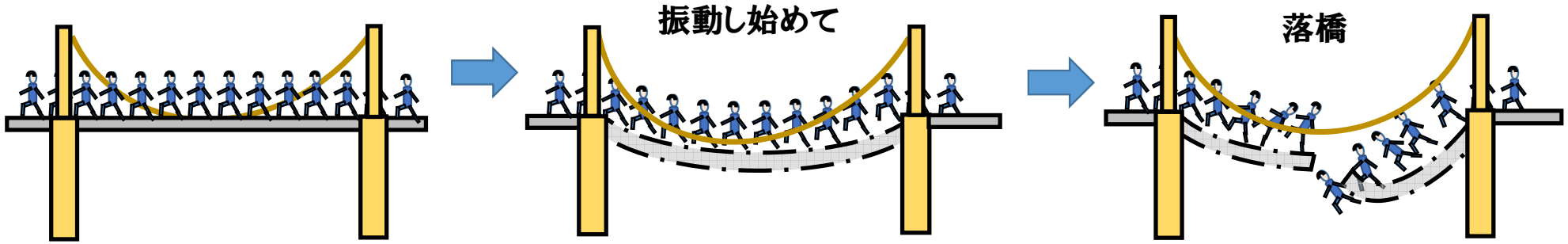
共振

③固有振動数より早く足踏みした場合



力は同じでも足踏みの速さによって変位は変化する

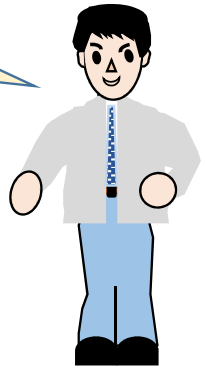
1850年にフランスのバス・シェーヌ吊橋が兵隊が足並みを揃えて行進し橋を渡っていたとき、橋が共振して落橋する事故が有りました。実は1831年にもイギリスのアーウイン川にかかる吊橋でも同じような事故がありました。



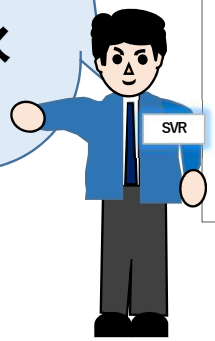
つい最近ではイギリスのミレニアム橋で歩行速度と橋の水平方向の振動数が共振する事例が発生しましたが、直ちにダンパ（振動振幅を減少させる装置）をつけて振動を抑えた事例があります。

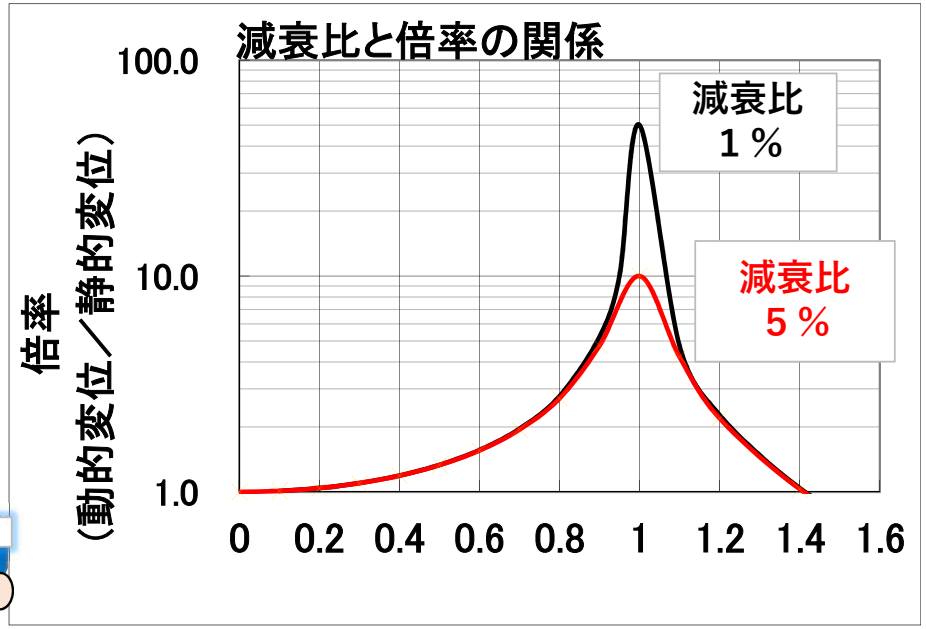
ウィキペディアより

静的と動的な違いは何となくわかりました。力の大きさが同じだと考えた場合、
物の変位（振幅）は
・静的な場合：物の強さ（剛性）に依存しますが、
・動的な場合：物の強さ（剛性）のほかに
　力の振動数と物の固有振動数の関係に依存すると言うことですね。



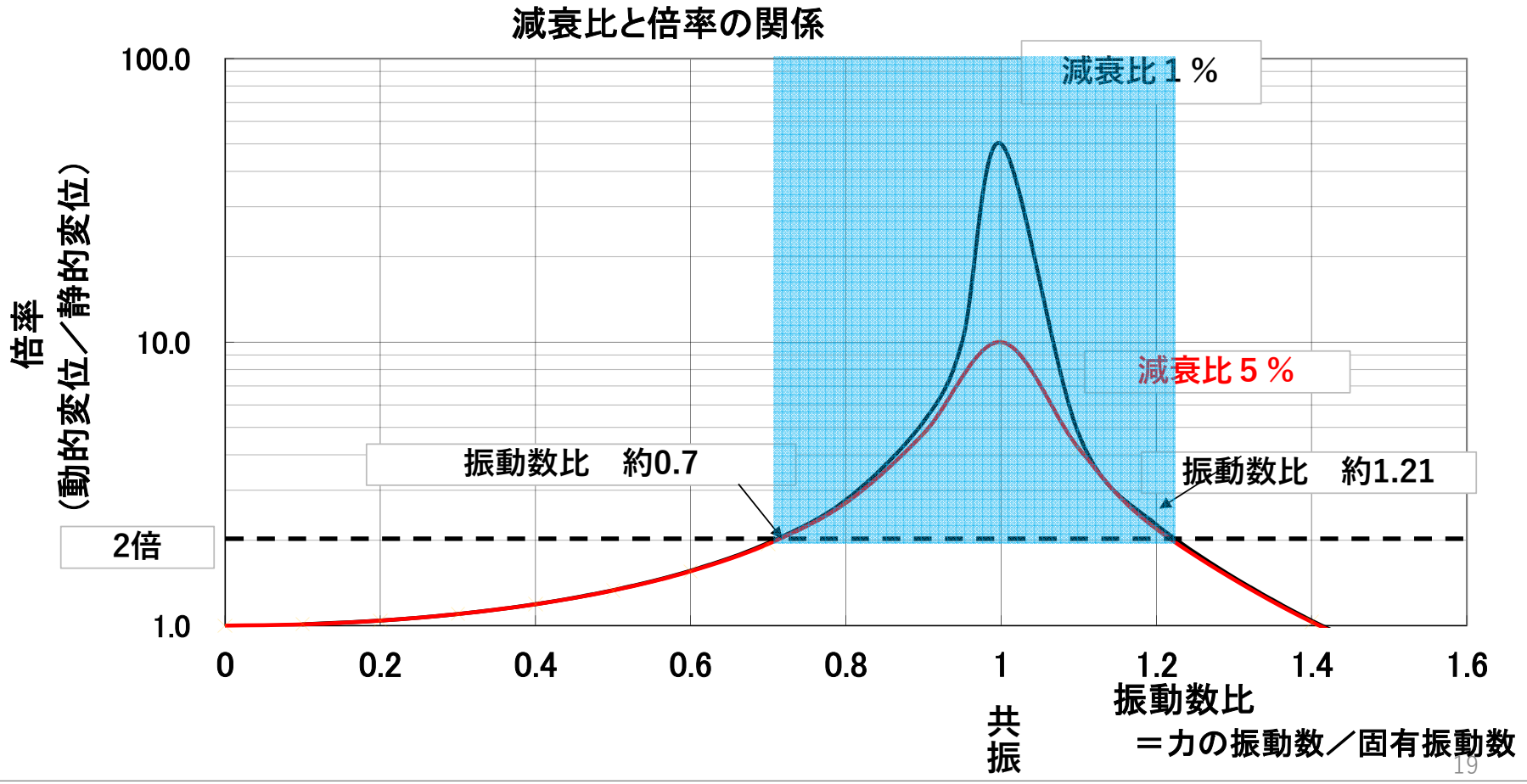
その通りです。動的な場合は、前に説明した減衰比も物の振幅に大きく影響します。
減衰比が小さいと振動の振幅は大きくなる傾向を示します。右の図は減衰比が振幅に与える影響を表しています。力の振動数と物の固有振動数の比率のより影響度は変化します。その影響は共振時に最大になります。
共振点以外でも動的変位と静的変位の比（倍率）が2を超える振動数比を影響を示したのが次ページの図です。





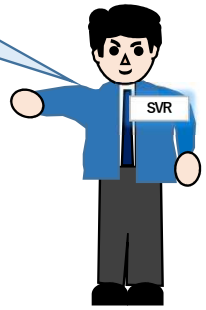
下図の水色の範囲の振動数比では振動変位が静的変位の2倍以上になるので、同じ力の大きさの場合でも動的のほうが大きな変位(応力)が発生する可能性が高い。

壊れやすい要因1



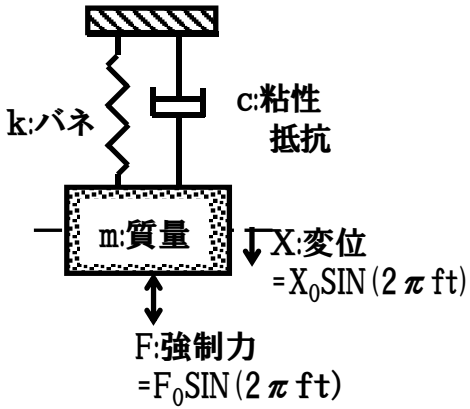
前の図はなぜあのようになるのですか？

数式を用いる必要があります。少し難しくなるので、バネで吊り下げられた質量のモデルを対象に力の釣り合いの式とその解の結果のみ示しておきます。
赤字の式を覚えておくともう振動のプロ級ですね。



運動方程式　$: mX'' + cX' + kX = F_0 * \mathrm{SIN}(2\pi ft)$

質量の振幅X_0を表す式は



$$X_0 = (F_0/k) * \sqrt{\frac{1}{\{1-(f/f_0)^2\}^2 + \{2h(f/f_0)\}^2}}$$

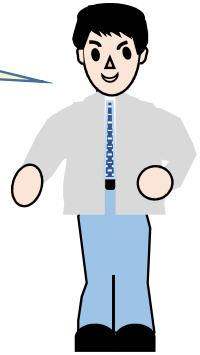
動的振幅＝静的変位＊動的倍率（応答倍率）

共振条件（$f=f_0$）では　$\dfrac{X_0}{(F_0/k)} = \dfrac{1}{2h}$

h:減衰比
$= c/(2\sqrt{(mk)})$

強制一自由度振動系

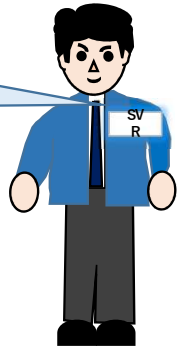
ところで固有振動数や減衰比、振動モードはどのようにして求めるのですか？

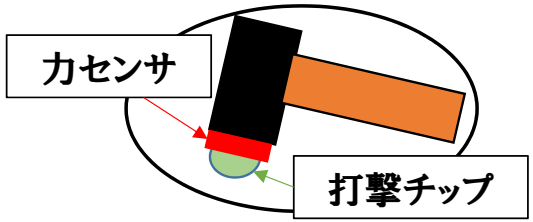


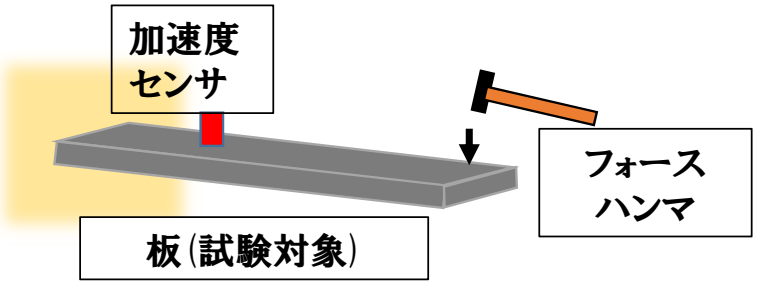
固有振動数と振動モードは有限要素法などの数値解析で求める方法と試験（実験）で求める方法があります。
一方、減衰比は数値解析では求まりません。
その理由は減衰比は物の固定方法や材料、付帯物の有無などの影響により非常にばらつくためです。 したがって試験で求めなければなりません。

ここでは試験（実験）により、固有振動数、減衰比、振動モードを求める方法を紹介します。

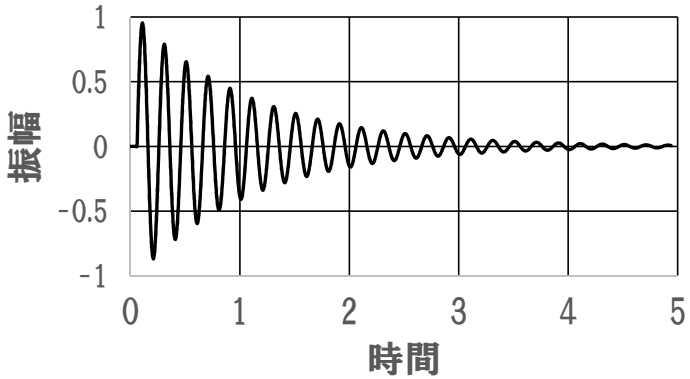
ここでは簡便的に実施可能な打撃試験法について説明します。
（一部の説明では加振試験法があります。）
打撃試験法は対象物をハンマで打撃し、そのときの振動を計測する方法です。

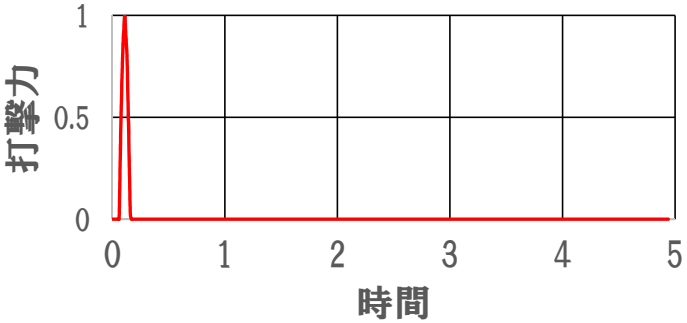




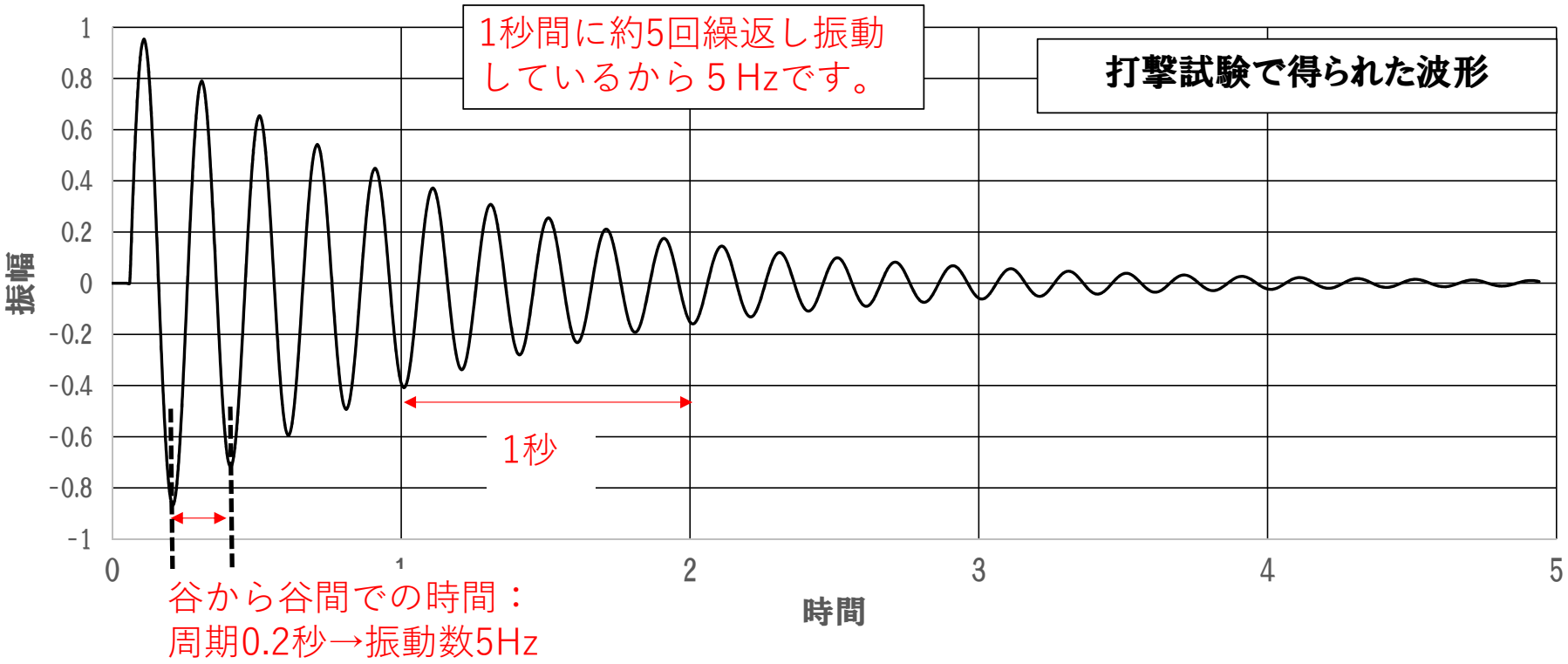


試験で得られる波形



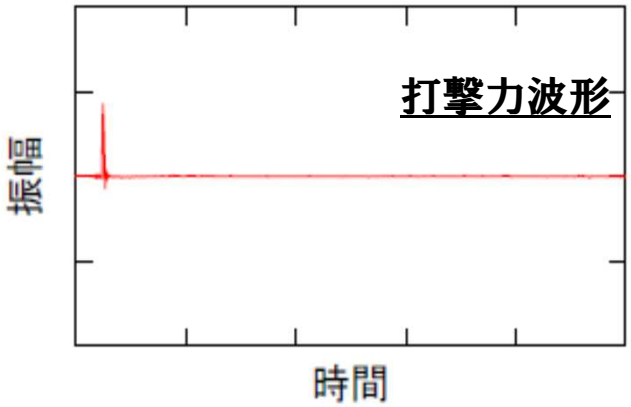


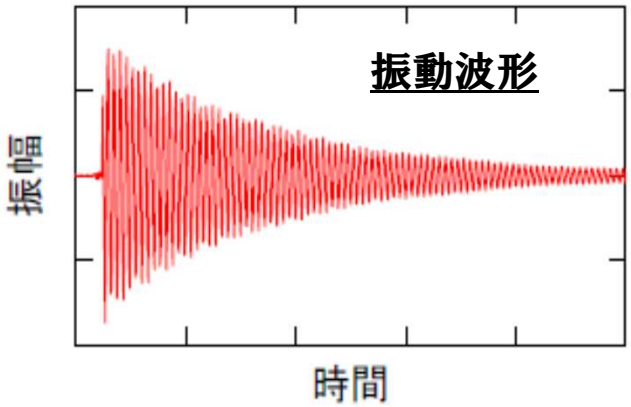
固有振動数の求め方１:振動波形から振動数を求める



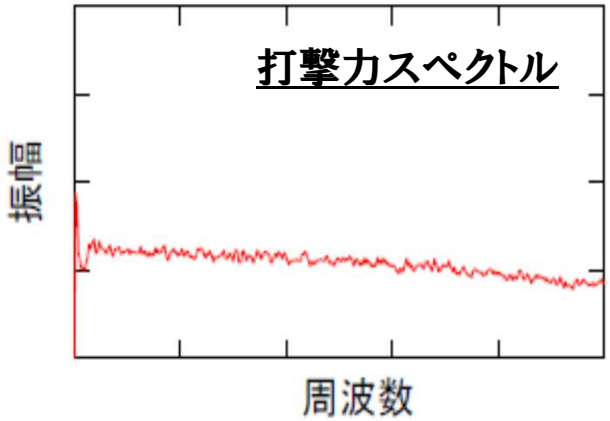
固有振動数の求め方２:波形の周波数分析を行い、固有振動数を求める

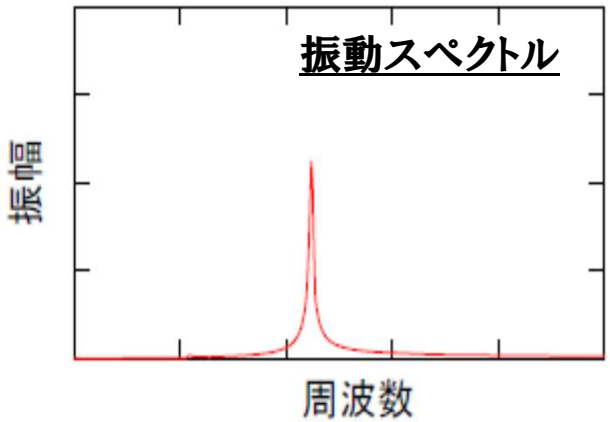
打撃試験で得られた波形



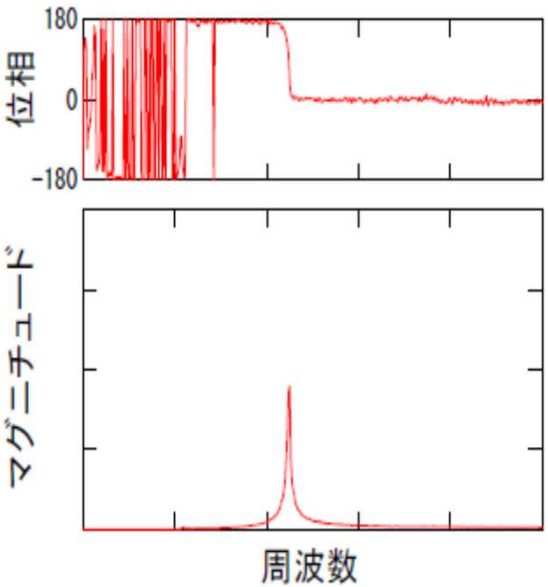


それぞれの周波数分析結果





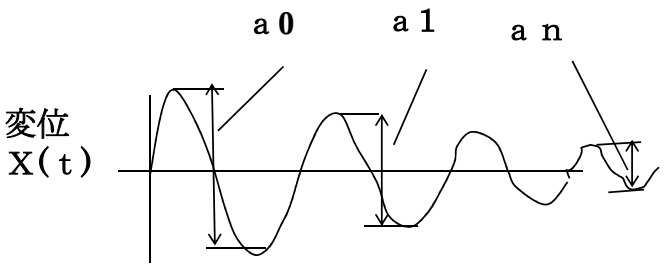
振動を力で割算した分析結果（伝達関数）



減衰比の求め方は主に以下の2通りです。
(1)時刻暦減衰波形より求める方法:打撃試験法
(2)周波数応答曲線より求める方法(ハーフパワー法):加振試験の場合が多い。

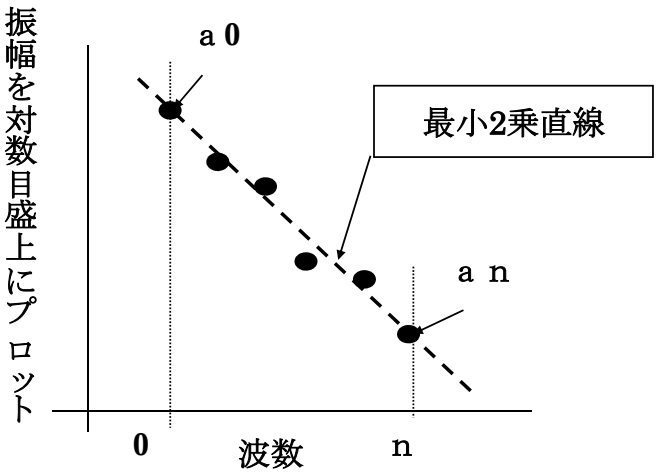
(1)時刻暦減衰波形より求める方法

$$h = \frac{1}{2\pi n} \ln(a0 / an)$$



h:減衰比
n:山数
ao:波数0に対する振幅
an:波数nに対する振幅
ln:自然対数

注)山数と波数のカウントに注意



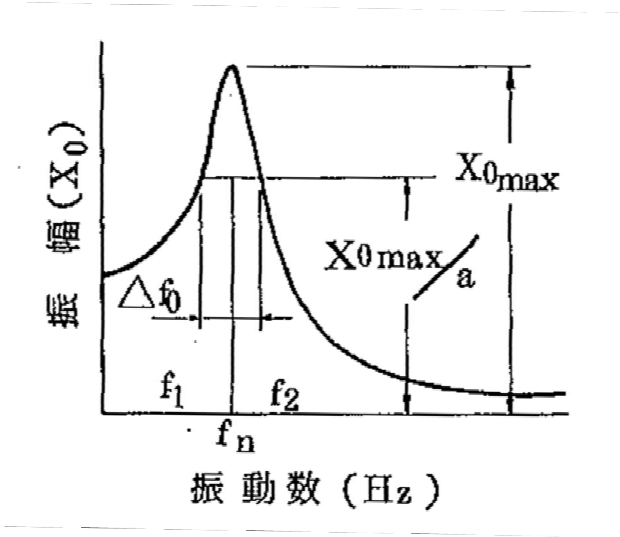
(2)周波数応答曲線より求める方法(ハーフパワー法)

①ハーフパワー法

(a)完全共振波形から求める方法

$$h = \frac{\Delta f}{2 f_n}$$

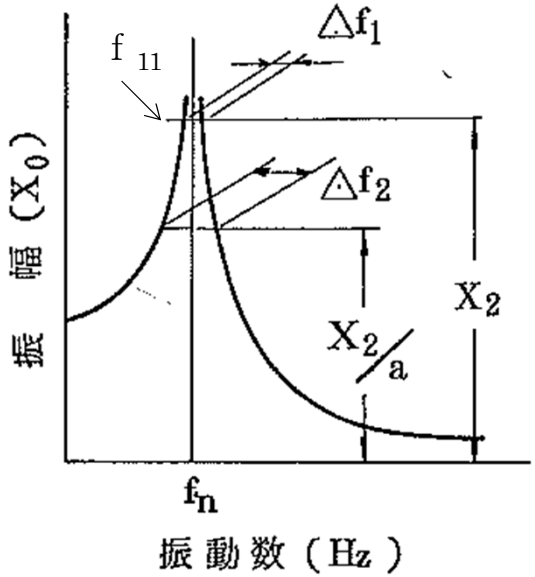
fn:応答曲線におけるピーク振動数
Δf:**f2－f1**
a:**√(2)**



(b)不完全共振波形から求める方法

$$h = \frac{\Delta f_2}{2 f_n} \sqrt{1-2(\Delta f_1 / \Delta f_2)^2}$$

X2:任意の振幅
fn:応答曲線におけるピーク振動数
(固有振動数、f11＋**0.5＊Δf1**)
Δf1、**Δf2**:右図参照
a:**√(2)**



26

振動の計測方法を以下示します。
(1)多点同時計測法
(2)計測点移動計測法

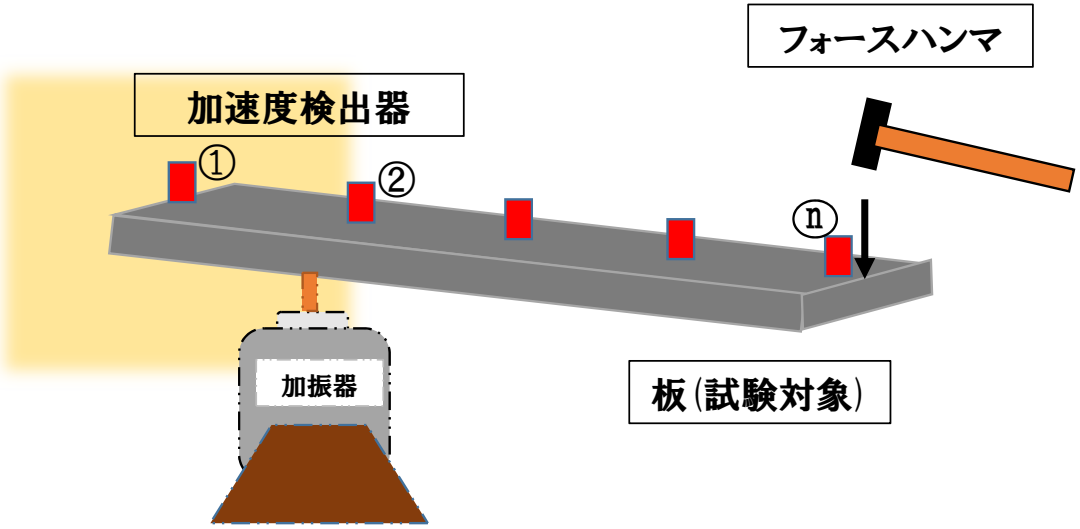
(1)多点同時計測法

右図のように検出器を複数個同時に試験対象に取付け、ハンマのよる打撃試験あるいは加振器による加振試験を行い、検出器の信号を同時に取り込みます。

各々の検出器出力信号とファースハンマあるいは加振力の出力振動との伝達関数分析を行い、各計測点に対する振幅と位相を求めることにより振動モードが計測できます。

ハンマや加振器からの出力信号が得られない場合は、それらに変わる基準信号を得るため、加速度検出器などを一つ追加し、その検出器は固定計測点として用いることがあります。

この方法は対象物の特性が特に非線形の場合に適切な方法です。



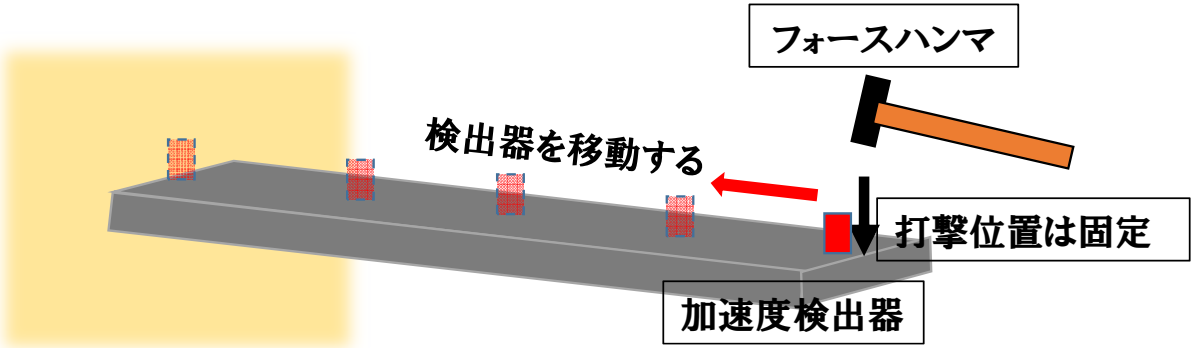
注)
線形系：
非線形系：

(1) 計測点移動計測法

この方法が対象物の特性が線形である場合に有効です。

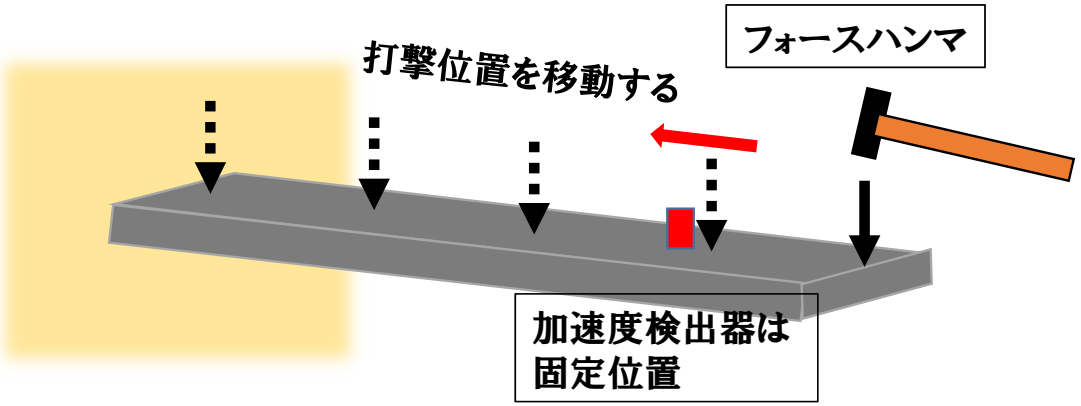
①検出器移動計測法

右図に示すように対象物の打撃位置を決め、その**打撃位置を固定点**とし、一方**検出器は随時移動**しながら、加振力と振動を計測、分析（各計測点に対する伝達関数を求める）する方法です。



②打撃点移動計測法

右図に示すように対象物の検出器位置を決め、その**検出器位置を固定点**とし、一方**打撃点は随時移動**しながら、加振力と振動を計測、分析（各計測点に対する伝達関数を求める）する方法です。

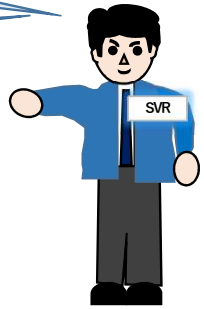


上記①と②で求めた結果は同じになります。

物が共振（振動）すると静的力による変位に比べ、どれ位変位が大きくなるか判りました。変位振幅が大きくなるということは応力が大きくなるので、物は壊れ易くなるのですね。

その通りですが、もう一つ動的力で物が壊れ易くなる要因があります。
それは材料の強さに関することです。

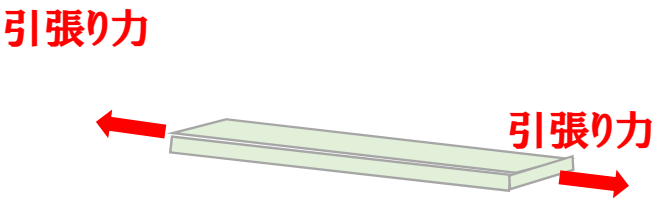
振動で物が壊れやすい要因その2：



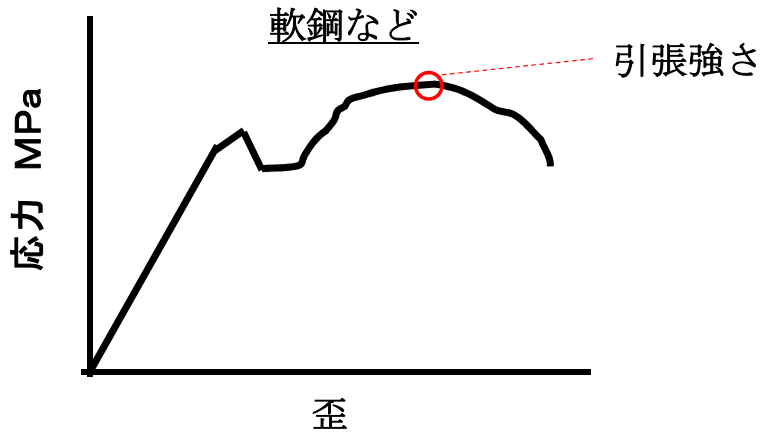
材料の強さには引張強さと疲労強さがあります。
引張強さは静的力に対する材料の強さを表しますが、**疲労強さは繰返作用する動的力（振動）**に対する強さを表す指標です。一般の金属材料では**引張強さ＞疲労強さ**ですから、例え、部材に同じ応力が生じていても動的力に対するほうが相対的に損傷しやすくなるわけです。

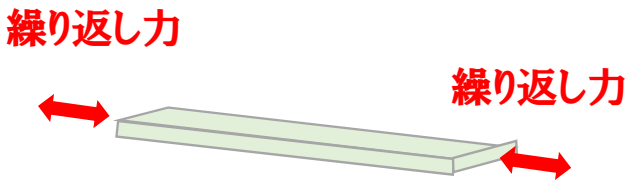
針金を手で切る場合をイメージして下さい。力一杯引張ってもなかなか切れません（静的力）が、繰返し曲げていると小さな力でも針金は切れますよね（動的振動力）。

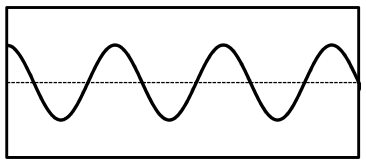
材料の引張り強さと疲労限度の意味



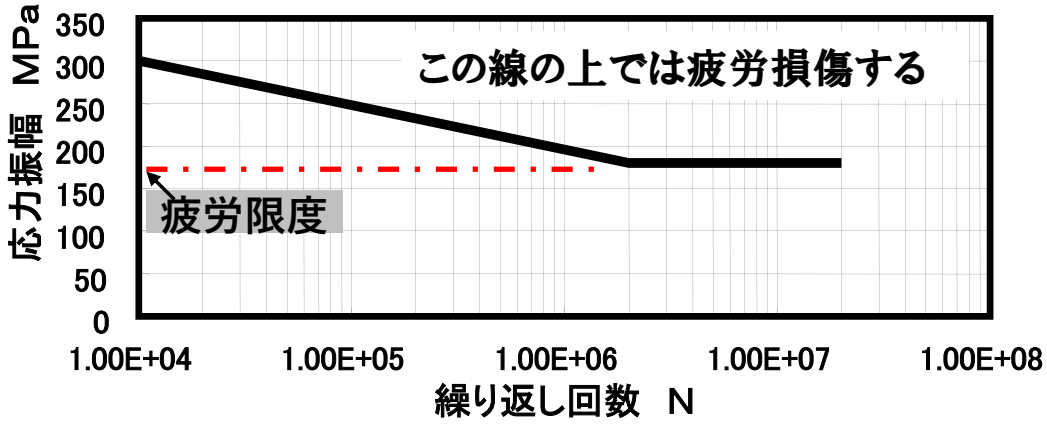
静的事象





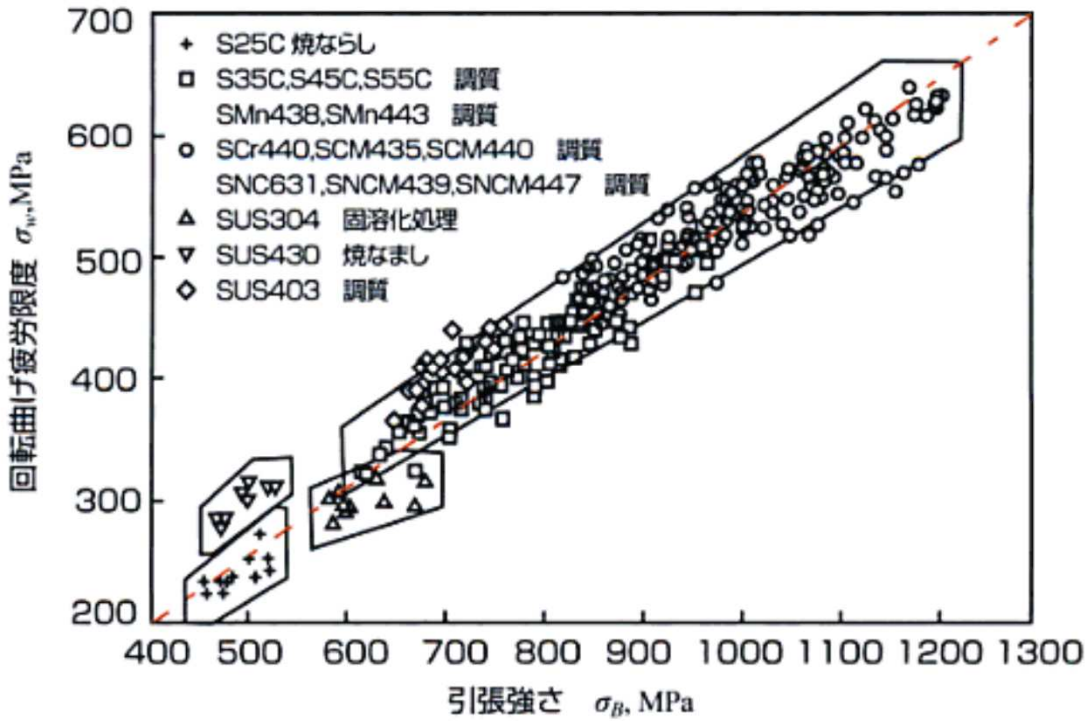


動的事象



このグラフは引張強さと疲労強さ(疲労限度)の関係の例を示したものです。
極大雑把になりますが引張り強さ≒２＊疲労限度です。

鉄鋼材料の引張強さと疲労限度の関係*



＊…引張強さと疲労限度の関係 「疲労設計便覧」日本材料学会、養賢堂、1995

振動すると物が壊れ易くなる理由について調べてきました。その結果、以下の事が判りました。

①同じ力が作用しても振動する場合、変位振幅は静的な変位に比べて大きくなる。
　動的変位振幅＝静的変位＊動的倍率
　特に共振すると動的倍率は減衰比に反比例して極端に大きくなる。
②材料の強度は
　静的な力による引張強さ>振動による疲労限度である。
③更に直接的に疲労で損傷しない場合でも物が振動していると摩耗が発生し、それが間接的に損傷の要因になることが考えられます。

物を設計する場合、静的と動的な考え方が大事であることが理解していただけましたか。

おまけ①:材料力学の公式を用い、共振時の振幅を概略推定する方法。

例題:単純支持梁に繰返し荷重$F_0 \sin \omega t$が作用し、共振した場合の振幅と応力推定

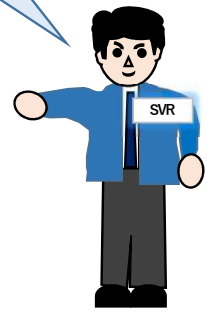
①材料力学の梁の計算式によりたわみと応力を求める。

②上(①)で求めたたわみと応力に動的倍率を乗じる。

共振状態を想定する場合、動的倍率は1/(2h)として計算する。

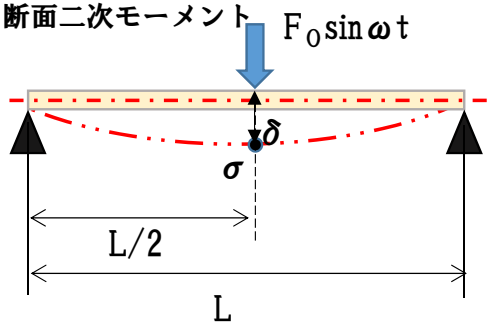
ここで、hは減衰比である。

なお、共振以外の場合の動的倍率はページ19に示す計算式で求める。



E:ヤング率

I:断面二次モーメント



①材料力学の計算

静的たわみ(δs)=$F_0 * L^3/(48 * E * I)$:梁中央

静的応力 (σs)= $F_0 * L * e/(4 * I)$:梁中央

注) e:図芯から表面までの距離(厚みtの板の場合 はe=t/2.

(梁の支持条件が他の境界条件の場合は係数 (48や4)が異なった値になります)

②共振時の推定計算

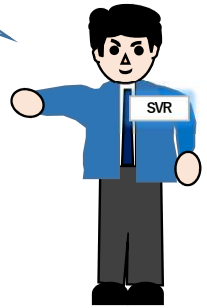
共振たわみ(δd)=δs*動的倍率

共振応力 (σd)=σd*動的倍率

:動的倍率=1/(2h) 、 h :減衰比

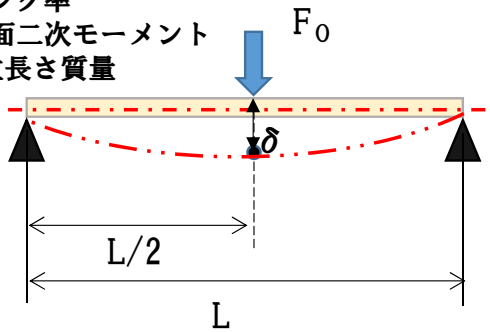
おまけ②:材料力学の公式を用い、固有振動数を概略推定する方法。

例題:単純支持梁の固有振動数を推定する



ケース１:集中荷重として計算

E：ヤング率
I ：断面二次モーメント
W:単位長さ質量



①材料力学の計算

静的たわみ(δs)=F_0＊L^3/(48＊E＊I) :梁中央

バネ定数(k)=F_0/δs

②固有振動数の計算

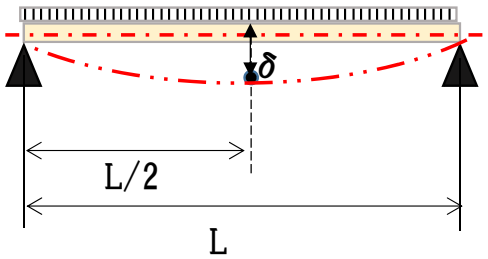
固有振動数=(1/(2π)＊√(k/M))

ただしM≒0.49＊w＊L

(梁の支持条件が他の境界条件の場合は係数（48や0.49)が異なった値になります)

ケース２：分布荷重として計算

E：ヤング率
I ：断面二次モーメント
W:単位長さ質量



①材料力学の計算

静的たわみ(δs)=5＊w＊g＊L^4/(384＊E＊I) :梁中央

ただしgは重力加速度

②固有振動数の計算

固有振動数=(1/(2π)＊√(g/δs))

(梁の支持条件が他の境界条件の場合は係数(5／384)が異なった値になります)

END